Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$\Delta=121-4m$	**2p**
	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{121}{4}\right]$, deci cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 30	**3p**
3.	$1+\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=3\Rightarrow\left(\log_7 x-1\right)^2=0$	**3p**
	$\log_7 x=1$, deci $x=7$, care convine	**2p**
4.	$C_n^2=45$, unde n este numărul de elemente al mulțimii, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=45$ și, cum n este număr natural, obținem $n=10$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta BC este egală cu 6	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot d(A,BC)}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12$	**2p**
6.	$\cos x\cos x-\sin x\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1&a&a^2-a\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b&b^2-b\\0&1&2b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b+a&b^2-b+2ab+a^2-a\\0&1&2b+2a\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&a+b&(a+b)^2-(a+b)\\0&1&2(a+b)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(3)A(-3)=A(0)=I_3$, deci inversa matricei $A(3)$ este matricea $A(-3)$	**2p**
	$X=A(-3)\cdot A(5)\Leftrightarrow X=A(2)$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$x*y=2xy-3x-3y+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=2\left(xy-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}=$	**3p**
	$=2\left(x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=14\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$	**2p**
	$x-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$ sau $x-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, deci $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$4\left(2^n+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=2^{20}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{2+n+n+1+n+2}=2^{20}$	**3p**
	$3n+5=20$, deci $n=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{x^3}=$	**3p**
	$=\frac{-2x^3+2x^3-6x^2+6x-2}{x^3(x-1)^3}=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	Panta dreptei care este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$ este $f'(2)=-\frac{7}{4}$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-3=f'(2)(x-0)$, deci $y=-\frac{7}{4}x+3$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-n^2}\right)^{-1}=e^{-1}$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{f(x)}dx=\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\limits_0^1\left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int\limits_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx+\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$	**3p**
	$=x\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^1-\int\limits_0^1\sqrt{x^2+1}dx+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_0^1$, deci $\int\limits_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	**2p**
c)	Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int\limits_0^x e^{f^2(t)}dt-x$ este derivabilă și $g'(x)=e^{x^2+1}-1$	**2p**
	$g'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $g(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int\limits_0^x e^{f^2(t)}dt=x$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(3-i)^2-6(3-i)+10=$	**2p**
	$=9-6i+i^2-18+6i+10=0$	**3p**
2.	$f(a)=a^2+6$, $f(a-2)=(a-2)^2+6$	**2p**
	$a^2+6=(a-2)^2+6$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$x^2+4x+5=2x+4 \Rightarrow x^2+2x+1=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au produsul cifrelor egal cu 16, are 3 elemente, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci segmentele AC și BD au același mijloc	**1p**
	$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow x_D=4$	**2p**
	$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow y_D=5$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}+\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}+2\sin\dfrac{5\pi}{6}=$	**2p**
	$=1-1+0+2\cdot\dfrac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1&-2a&0\\0&1&0\\2a&-2a^2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2b&0\\0&1&0\\2b&-2b^2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2b-2a&0\\0&1&0\\2a+2b&-4ab-2a^2-2b^2&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&-2(a+b)&0\\0&1&0\\2(a+b)&-2(a+b)^2&1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**

c)	$A(n)=A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(2020)=A(1+2+3+\ldots+2020)=A\left(\frac{2020\cdot 2021}{2}\right)=$ $=A(1010\cdot 2021)$, deci $n=1010\cdot 2021$, care este multiplu de 2021	**3p** **2p**
2.a)	$\sqrt{3}*0=\sqrt{3}\cdot 0-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+0\right)+3+\sqrt{3}=$ $=-3+3+\sqrt{3}=\sqrt{3}$	**3p** **2p**
b)	$x*y=xy-\sqrt{3}x-\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=$ $=x\left(y-\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}*y=\sqrt{3}$, unde x și y sunt numere reale $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1}}*\sqrt{3}\right)*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}=\sqrt{3}*\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}*\ldots*\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{96}}\right)=\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+4)e^x-\left(x^2+4x+4\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$ $=\frac{e^x\left(-x^2-2x\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{-x(x+2)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{e^x}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(g(1)+g(2)+\ldots+g(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{e^1}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}\right)=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n-1}{\frac{1}{e}-1}=\frac{1}{e-1}$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big\|_0^1=$ $=1+1=2$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(2-\frac{1}{x+1}\right)dx=2x\Big\|_0^1-\ln(x+1)\Big\|_0^1=$ $=2-\ln 2+\ln 1=2-\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+1)^n dx=e^x(2x+1)^n\Big\|_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+1)^{n-1}dx=$ $=e\cdot 3^n-1-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=3^n e-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z-z^2=2(1+i)-(1+i)^2=$	**2p**
	$=2+2i-\left(1+2i+i^2\right)=2+2i-2i=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2-8m$	**2p**
	$f(x)>0$ pentru orice număr real x, deci $\Delta<0$, de unde obținem $m\in(0,8)$	**3p**
3.	$\log_5\left(\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)\right)=2\Rightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-1=5^2$	**3p**
	$x=26$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu n elemente are 2^n submulțimi	**2p**
	$2^n=32$, deci $n=5$	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Rightarrow ABDC$ paralelogram, deci segmentele AD și BC au același mijloc	**3p**
	Coordonatele punctului D sunt $x=8$ și $y=5$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$	**2p**
	$\cos x-\sin x=\sin x-\cos x\Leftrightarrow\cos x=\sin x$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=8+0+0-0-0-0=8$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}4-2a-2b+2ab&0&2a+2b-2ab\\0&4&0\\2a+2b-2ab&0&4-2a-2b+2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}ab-a-b+2&0&2-(ab-a-b+2)\\0&2&0\\2-(ab-a-b+2)&0&ab-a-b+2\end{pmatrix}=2A(ab-a-b+2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(pq-p-q+2)=2I_3\Leftrightarrow A(pq-p-q+2)=A(2)\Leftrightarrow pq-p-q=0$	**2p**
	Cum p și q sunt numere întregi, din $(p-1)(q-1)=1$, obținem $p=0$, $q=0$ sau $p=2$, $q=2$	**3p**

2.a)	$x*y=-\frac{3}{5}xy+\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x+y=-\frac{3}{5}x\left(y-\frac{5}{3}\right)+y-\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x+1\right)+\frac{5}{3}=-\frac{3}{5}\left(x-\frac{5}{3}\right)\left(y-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}=-\frac{3}{5}\left(\frac{5x}{3}-\frac{5}{3}\right)\left(\frac{5}{3x}-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}=\frac{5}{3}\frac{(x-1)^2}{x}+\frac{5}{3},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x>0\Rightarrow\frac{5(x-1)^2}{3x}\geq 0$, deci $\frac{5x}{3}*\frac{5}{3x}\geq\frac{5}{3}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$x*\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3}*y=\frac{5}{3}$, unde x și y sunt numere reale	**3p**
	$\frac{1}{3}*\frac{2}{3}*\frac{3}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}=\left(\left(\frac{1}{3}*\ldots*\frac{4}{3}\right)*\frac{5}{3}\right)*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}*\left(\frac{6}{3}*\ldots*\frac{2020}{3}\right)=\frac{5}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4-\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=$	**3p**
	$=\frac{4x^2+4-2x}{x^2+1}=\frac{2\left(2x^2-x+2\right)}{x^2+1},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x+1)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4-\ln\frac{x^2+2x+2}{x^2+1}\right)=$	**2p**
	$=4-\ln 1=4$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f^2(x)dx=\int\limits_0^1\left(25-x^2\right)dx=\left.\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=25-\frac{1}{3}=\frac{74}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_{-3}^{3}\left\|x f(x)\right\|dx=-\int\limits_{-3}^{0}x\sqrt{25-x^2}\,dx+\int\limits_0^3 x\sqrt{25-x^2}\,dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}\left.\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-3}^{0}-\frac{1}{3}\left.\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^3=\frac{125}{3}-\frac{64}{3}-\frac{64}{3}+\frac{125}{3}=\frac{122}{3}$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1\frac{1}{f^{n+1}(x)}dx-\int\limits_0^1\frac{1}{f^n(x)}dx=\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}\left(\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1\right)dx$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{\left(25-x^2\right)^n}}>0$ și $\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}-1<0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow I_{n+1}-I_n\leq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $\left(I_n\right)_{n\geq 1}$ este descrescător	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n<3 \Rightarrow M=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma pătratelor elementelor mulțimii M este $0^2+1^2+2^2=5$	**2p**
2.	Abscisa vârfului parabolei asociate funcției f este $-\frac{b}{2a}=\frac{m}{2}$	**2p**
	$\frac{m}{2}=3$, deci $m=6$	**3p**
3.	$x+2=8-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 12 elemente are C_{12}^{10} submulțimi cu 10 elemente	**3p**
	$C_{12}^{10}=\frac{12\cdot 11}{2}=66$	**2p**
5.	$D(2,2)$, deci $M(5,6)$, unde M este mijlocul segmentului CD	**2p**
	$m_{AC}=3$, deci ecuația dreptei paralele cu dreapta AC și care trece prin punctul M este $y-6=3(x-5)$, deci $y=3x-9$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi=1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$S=(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&0&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-1)+(-1)-0-1-1=-4$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+2xy&0&1-2xy\\0&2&0\\1-2xy&0&1+2xy\end{pmatrix}$, $A(2xy)=\begin{pmatrix}2xy&1&-2xy\\1&0&1\\-2xy&1&2xy\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A(x)A(y)-A(2xy))=\begin{vmatrix}1&-1&1\\-1&2&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(x)A\left(\frac{1}{2x}\right)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=2I_3$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$A(1)A\left(\frac{1}{2}\right)+A(2)A\left(\frac{1}{4}\right)+\ldots+A(1010)A\left(\frac{1}{2020}\right)=1010\cdot 2I_3$, deci $n=2020$	**3p**

2.a)	$2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 =$	**3p**
	$= (2+3)^5 = 5^5$	**2p**
b)	$2^5 * x^5 * \left(243x^5\right) = \left(\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{x^5} + \sqrt[5]{243x^5}\right)^5 = (2+x+3x)^5 = (2+4x)^5$, unde x este număr real	**3p**
	$(2+4x)^5 = 10^5$, deci $x=2$	**2p**
c)	$1^5 * 2^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5}\right)^5 = (1+2)^5$, $1^5 * 2^5 * 3^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5}\right)^5 = (1+2+3)^5$	**2p**
	$M = 1^5 * 2^5 * 3^5 * \ldots * 10^5 = \left(\sqrt[5]{1^5} + \sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} + \ldots + \sqrt[5]{10^5}\right)^5 = (1+2+3+\ldots+10)^5 = 5^5 \cdot 11^5 = N$, de unde obținem $M - N = 0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} =$	**2p**
	$= \dfrac{2x + x(x+1) - (x+1)^2}{x(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1} + \ln\dfrac{x+1}{x}\right) = 1 + \ln 1 = 1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty) \Rightarrow f(x) \ge f(1)$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**3p**
	$f(1) = \ln 2 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, de unde obținem că graficul funcției f **nu** intersectează axa Ox	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^2+1\right)dx = \left.\left(\dfrac{x^3}{3} + x\right)\right\|_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{3} + 1 - 0 = \dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int\limits_{-1}^1 \|xf(x)\|\,dx = -\int\limits_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\,dx + \int\limits_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx =$	**2p**
	$= -\dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_{-1}^0 + \dfrac{1}{3}\left.\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\right\|_0^1 = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$	**3p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x t \cdot f(t)\,dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x f(x)}{2x} =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2} = \dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2z_1-z_2=2(3-3i)-(5-6i)=$	**2p**
	$=6-6i-5+6i=1$	**3p**
2.	$m+15+(m+1)+15=35$	**2p**
	$2m+31=35\Rightarrow m=2$	**3p**
3.	$3^x(2-3)+27=0\Leftrightarrow 3^x=27$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de trei cifre care sunt multipli de 25 sunt $25\cdot 4$, $25\cdot 5,\dots$, $25\cdot 39$, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{900}=\dfrac{1}{25}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$a=2$, $b=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 6=\dfrac{4\cdot AC}{2}\Rightarrow AC=3$	**3p**
	$BC=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&2&1\\2&a+1&a\\a&6&4\end{vmatrix}=8a+8+12+2a^2-a^2-a-12a-16=$	**3p**
	$=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(4)-A(1)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&3\\3&0&0\end{pmatrix}$, $(A(4)-A(1))A(a)=3\begin{pmatrix}0&0&0\\a+2&a+7&a+4\\2&2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real	**3p**
	$A(a)(A(4)-A(1))=3\begin{pmatrix}1&2&2\\a&a+1&a+1\\4&6&6\end{pmatrix}$, deci $A(a)(A(4)-A(1))\neq(A(4)-A(1))A(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{Z}\setminus\{1,4\}$ și soluția sistemului de ecuații este $\left(\dfrac{a-3}{a-4},\dfrac{a-6}{a-4},-\dfrac{a-6}{a-4}\right)$	**3p**
	Cum x_0,y_0, z_0 și a sunt numere întregi, obținem $a=3$ sau $a=5$, care convin	**2p**

2.a)	$3*0=\frac{100(3+0)}{3\cdot 0+100}=$	**3p**
	$=\frac{300}{100}=3$	**2p**
b)	$f(x*y)=\frac{10-\frac{100(x+y)}{xy+100}}{10+\frac{100(x+y)}{xy+100}}=\frac{10xy-100x-100y+1000}{10xy+100x+100y+1000}=\frac{xy-10x-10y+100}{xy+10x+10y+100}=$	**3p**
	$=\frac{(x-10)(y-10)}{(x+10)(y+10)}=\frac{10-x}{10+x}\cdot\frac{10-y}{10+y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x, y\in M$	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{x*x*...*x}_{\text{de 11 ori } x}\right)=f(0)$, deci $\underbrace{f(x)f(x)\dots f(x)}_{\text{de 11 ori } f(x)}=f(0)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^{11}=1$	**3p**
	$f(x)=1\Leftrightarrow 10-x=10+x$, deci $x=0$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2-4x+1\right)+e^x(2x-4)=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-2x-3\right)=e^x(x-3)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $\left(x_0, f(x_0)\right)$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2020\Leftrightarrow f'(x_0)=0$	**2p**
	$e^{x_0}(x_0-3)(x_0+1)=0\Leftrightarrow x_0=-1$ sau $x_0=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=\frac{6}{e}$, $f(3)=-2e^3$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-1)$, pe $(-1,3)$ și pe $(3,+\infty)$, graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=a$ în exact trei puncte $\Leftrightarrow f(x)=a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,\frac{6}{e}\right)\cap\left(-2e^3,+\infty\right)=\left(0,\frac{6}{e}\right)$	**3p**
2.a)	$F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\ln x+\frac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**3p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\|_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big\|_e^a-\int_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-e-(a-e)=a\ln a-a$	**3p**
	$a\ln a-a=2a\Leftrightarrow a(\ln a-3)=0$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1+2i\sqrt{3}+3i^2-\left(1-2i\sqrt{3}+3i^2\right)=4i\sqrt{3}$	**3p**
	Partea reală a lui z este 0	**2p**
2.	$f(3)<0$, $f(4)<0$, $f(5)<0$	**2p**
	$f(0)>0$, $f(1)>0$ și $f(2)>0$, deci $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)<0$	**3p**
3.	$(\log_2 x-1)^2=0\Rightarrow \log_2 x=1$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 3 elemente ale lui A, care conțin exact 2 numere impare este egal cu $C_5^2\cdot C_5^1=$	**3p**
	$=\dfrac{5\cdot 4}{2}\cdot 5=50$	**2p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{CA}=$	**3p**
	$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$	**2p**
6.	$1-2\sin^2 x=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{1}{3}$	**3p**
	Cum $x\in(\pi,2\pi)$, obținem $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=10+6+4-4-4-15=-3$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații devine $\begin{cases}2x-y+2z=4\\3x-y+2z=1\\2x-y+5z=-2\end{cases}$ și, cum $\det\left(A(-1)\right)=3\neq 0$, sistemul de ecuații este compatibil determinat	**2p**
	$x=-3$, $y=-14$, $z=-2$	**3p**
c)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2&a&2\\3&a&2\\2&a&5\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}2&1&2\\3&1&2\\2&1&5\end{vmatrix}=-3a$, pentru orice număr real a și, cum $\det\left(A(a)\right)=0$, obținem $a=0$	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&2\\3&2\end{vmatrix}=-2\neq 0$ și $\begin{vmatrix}2&2&4\\3&2&1\\2&5&b\end{vmatrix}=0$, deci $38-2b=0$, de unde obținem $b=19$	**3p**

2.a)	$x * y = \sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1} =$	**3p**
	$= \sqrt{x^2\left(y^2-1\right)-\left(y^2-1\right)+1} = \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)+1}$, pentru orice $x,\ y \in G$	**2p**
b)	$x * e = x \Leftrightarrow \sqrt{\left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right)+1} = x \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(e^2-1\right) = x^2-1$, pentru orice $x \in G$, deci $e^2-1=1$ şi, cum $e \in G$, obținem $e=\sqrt{2}$	**3p**
	Cum $\sqrt{2} * x = \sqrt{(2-1)\left(x^2-1\right)+1} = \sqrt{x^2} = x$, pentru orice $x \in G$, obținem că $e=\sqrt{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x) * f(y) = \sqrt{\left(f^2(x)-1\right)\left(f^2(y)-1\right)+1} = \sqrt{(x+1-1)(y+1-1)+1} = \sqrt{xy+1} = f(xy)$, pentru orice $x,\ y \in M$, deci f este un morfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**3p**
	f este continuă, f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, deci f este bijectivă $\Rightarrow$ f este un izomorfism de la grupul $(M,\cdot)$ la grupul $(G,*)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+1)e^{-x}\cdot(-1) =$	**3p**
	$= \left(1-(x+1)\right)e^{-x} = -xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n} = \left(\dfrac{(n+1)e^{-n}}{e(n+2)e^{-(n+1)}}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(f(n)\right)^n}{e^n\left(f(n+1)\right)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right)^{\frac{-n}{n+2}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left((x+1)e^{-x}\right) = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{e^x} = 0$	**2p**
	Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=1$ şi f este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale distincte $\Leftrightarrow m \in (0,1)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x)-x\right)dx = \int_0^1 \dfrac{2}{x+1}dx = 2\ln(x+1)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2\ln 2 - 2\ln 1 = 2\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e \left(f(x)-\dfrac{2}{x+1}\right)\ln x\,dx = \int_1^e x\ln x\,dx = \dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e - \int_1^e \dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx =$	**3p**
	$= \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e = \dfrac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	F este primitivă a lui f şi $F(0)=0$, deci $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x+1)$	**1p**
	$\int_0^1 2f(x)F(x)dx = \int_0^1 2F(x)F'(x)dx = F^2(x)\Big\vert_0^1 = \dfrac{1}{4} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2$	**2p**
	$\dfrac{1}{4} + 2\ln 2 + 4\ln^2 2 = \dfrac{1}{4} + \ln 4 + \ln^2 a \Leftrightarrow 4\ln^2 2 = \ln^2 a$, deci $\ln a = -2\ln 2$ sau $\ln a = 2\ln 2$, de unde obținem $a = \dfrac{1}{4}$ sau $a=4$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0<\sqrt{2}-1<1 \Rightarrow 0<\left(\sqrt{2}-1\right)^2<1$	**3p**
	Partea întreagă a numărului real x este 0	**2p**
2.	$f(x)=y \Leftrightarrow x^2-2x=2x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=3$	**2p**
3.	$4^{x-2}=4^{2x-7} \Leftrightarrow x-2=2x-7$	**3p**
	$x=5$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_{10}^3=$	**3p**
	$=\dfrac{10!}{3!(10-3)!}=120$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow B$ este mijlocul segmentului AC, deci $2=\dfrac{1+x_C}{2}$ și $5=\dfrac{3+y_C}{2}$	**3p**
	$x_C=3$ și $y_C=7$	**2p**
6.	$\cos(\sphericalangle BAC)=\dfrac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos(\sphericalangle BAC)$, deci $BC=\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=5+\sqrt{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&3\\0&1&2\\1&-2&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-3-(-4)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^2-3$, pentru orice număr real a	**2p**
	Pentru orice număr rațional q, $\det(A(q))\neq 0$, deci matricea $A(q)$ este inversabilă	**3p**
c)	Pentru orice număr rațional p, $B(p)=2\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&p\\-1&-p&0\end{pmatrix}$, $B(p)B(p)=-4\begin{pmatrix}1&p&0\\p&p^2&0\\0&0&1+p^2\end{pmatrix}$ și $B(p)B(p)B(p)=-4\left(p^2+1\right)B(p)$	**3p**
	$\left(1-4p^2\right)B(p)=O_3 \Leftrightarrow p=-\dfrac{1}{2}$ sau $p=\dfrac{1}{2}$, care convin	**2p**
2.a)	$\dfrac{1}{3}*\dfrac{1}{3}=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{9}{5}=\dfrac{1}{5}$	**2p**

b)	$x*\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$\frac{1}{2}*x=\frac{\frac{1}{2}\cdot x}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot x-\frac{1}{2}-x+1}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x=x*\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in G$ și, cum $\frac{1}{2}\in G$, obținem că $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x*y)=\frac{2xy-x-y+1}{xy}-1=\frac{xy-x-y+1}{xy}=\frac{(x-1)(y-1)}{xy}=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{y-1}{y}=f(x)f(y)$, pentru orice $x,y\in G$, deci f este un morfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**3p**
	f este continuă, f este strict descrescătoare pe $(0,1)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, deci f este bijectivă $\Rightarrow f$ este un izomorfism de la grupul $(G,*)$ la grupul $(M,\cdot)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $M(m,f(m))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=2x\Leftrightarrow f'(m)=2$	**2p**
	$1+\ln m=2\Rightarrow m=e$, care convine	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\Rightarrow f$ strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$, deci $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$x\ln x\geq-\frac{1}{e}$, deci $x\ln x+\frac{1}{e}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int\limits_0^x f(t)dt=\int\limits_0^x\cos t\,dt=\sin t\Big\vert_0^x=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\sin x=0$	**3p**
c)	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\leq\cos x\leq 1\Rightarrow 0\leq\cos^n x\leq 1\Rightarrow I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x(\cos x-1)dx\leq 0\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq1}$ e descrescător	**2p**
	$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow\cos^n x\geq 0\Rightarrow I_n\geq 0$, pentru orice număr natural nenul n, deci șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este mărginit inferior, de unde obținem că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$A=\{0,1,2\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$f(1)=m+n$ și $f(2)=2m+n$, deci $m+n=2$ și $2m+n=1$	**2p**
	$m=-1,\ n=3$	**3p**
3.	$\left(4^x+4\right)\left(4^x-2\right)=0$	**2p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\frac{1}{2}$	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au cifra sutelor un număr prim are $4\cdot 10\cdot 10=400$ de elemente, deci sunt 400 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{400}{900}=\frac{4}{9}$	**1p**
5.	O este punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}$	**3p**
	$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$, obținem $\sin x=-\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&1\\-3&0&1\\3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+3+0-0-(-2)+0=5$	**2p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=a^2-6a+5$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică $\left(x_0,y_0,z_0\right)$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{1,5\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2(a-1)}{a-5},-\frac{2}{a-5},-\frac{a+1}{a-5}\right)$	**3p**
	$2\cdot\left(-\frac{2}{a-5}\right)=\frac{2(a-1)}{a-5}+\left(-\frac{a+1}{a-5}\right)$, deci $a=-1$, care convine	**2p**

2.a)	$1*3=1+3-\frac{1\cdot 3}{3}=$	**3p**
	$=1+3-1=3$	**2p**
b)	$x*x=-\frac{1}{3}(x-3)^2+3$, $x*x*x=\frac{1}{3^2}(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{1}{9}(x-3)^3+3=\frac{26}{9}\Leftrightarrow(x-3)^3=-1\Leftrightarrow x-3=-1$, de unde obținem $x=2$	**3p**
c)	$x*0=0*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$n*n'=0\Leftrightarrow n'(n-3)=3n$, deci $n'=\frac{3n}{n-3}$, pentru orice număr natural n, $n\neq 3$	**2p**
	Cum n și n' sunt numere naturale, obținem $n=0$, $n=4$, $n=6$ sau $n=12$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-\frac{4}{x}=$	**3p**
	$=\frac{4(x^4-1)}{x}=\frac{4(x^2-1)(x^2+1)}{x}=\frac{4(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^4-4\ln x)=+\infty$	**3p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,1)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(1)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci pentru fiecare număr natural n, $n\geq 2$, ecuația $f(x)-n=0$ are două soluții reale distincte, $x_1\in(0,1)$ și $x_2\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^e \frac{1}{x^2}f(\ln x)dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^3 x\,dx=\frac{\ln^4 x}{4}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{\ln^4 e}{4}-\frac{\ln^4 1}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$F(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=0\Rightarrow F(x)=(x^3-3x^2+6x-6)e^x+6$	**2p**
	$\int_0^1 f(x)F(x)dx=\int_0^1 F'(x)F(x)dx=\frac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\left(F^2(1)-F^2(0)\right)=2(e-3)^2$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^8}=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9}{1-\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right)<2$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-5=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, produsul absciselor punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egal cu -5	**3p**
3.	$3^{x-2}\left(3^2+1+3^4\right)=91 \Leftrightarrow 3^{x-2}=1$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$T_{k+1}=C_9^k\left(\sqrt{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_9^k x^{\frac{9-k}{2}+(-k)}=C_9^k x^{\frac{9-3k}{2}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,9\}$	**3p**
	$\frac{9-3k}{2}=0 \Leftrightarrow k=3$, deci $T_4=C_9^3=84$ nu îl conține pe x	**2p**
5.	$G\left(\frac{-1+1+3}{3},\frac{1+3+2}{3}\right)$, deci $G(1,2)$ este centrul de greutate al triunghiului ABC	**3p**
	Ecuația dreptei OG este $y-0=\frac{2-0}{1-0}(x-0)$, deci $y=2x$	**2p**
6.	$\cos C=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$2R=\frac{AB}{\sin C}\Rightarrow 2R=\frac{4}{\sqrt{2}}$, deci raza cercului circumscris triunghiului ABC este $R=\sqrt{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&1&1\\3&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+6-(-3)-4-0=7$	**3p**
b)	$\det(A(a))=11-4a$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	Cum $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow a=\frac{11}{4}\notin\mathbb{Z}$, obținem $\det(A(a))\neq 0$, pentru orice număr întreg a, deci rangul matricei $A(a)$ este egal cu 3, pentru orice număr întreg a	**3p**
c)	Pentru orice număr întreg m, $A(m)$ este inversabilă și $A^{-1}(m)$ are toate elementele numere întregi $\Leftrightarrow \det(A(m))=-1$ sau $\det(A(m))=1$	**3p**
	Cum m este număr întreg, obținem $m=3$	**2p**

2.a)	$2\circ 2=\frac{2\cdot 2}{2+2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{4}=1$	**2p**
b)	$x\circ y\circ z=\left(\frac{xy}{x+y}\right)\circ z=\frac{\frac{xy}{x+y}\cdot z}{\frac{xy}{x+y}+z}=\frac{xyz}{xy+xz+yz}=$	**3p**
	$=\frac{1}{\frac{xy}{xyz}+\frac{xz}{xyz}+\frac{yz}{xyz}}=\frac{1}{z^{-1}+y^{-1}+x^{-1}}=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$, pentru orice $x,y,z\in M$	**2p**
c)	$\frac{1}{2}\circ\frac{1}{3}\circ\frac{1}{4}\circ\ldots\circ\frac{1}{10}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+\ldots+\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(2+3+4+\ldots+10\right)^{-1}=$	**3p**
	$=\left(\frac{10\cdot 11}{2}-1\right)^{-1}=54^{-1}=\frac{1}{54}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=$	**3p**
	$=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)(x+1)}=-\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	f este continuă pe $(1,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow f$ este surjectivă, deci f este bijectivă	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x-1}}=\ln e^2=2$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-3x+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2=\frac{5}{6}$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(x-3)\ln x\,dx+\int_1^e\frac{2}{x}\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\ln x\right\|_1^e-\int_1^e\left(\frac{x}{2}-3\right)dx+\left.2\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln^2 x\right\|_1^e=$	**2p**
	$=\frac{e^2}{2}-3e-\left.\left(\frac{x^2}{4}-3x\right)\right\|_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\frac{e^2}{2}-3e-\left(\frac{e^2}{4}-3e-\frac{1}{4}+3\right)+1=\frac{e^2-7}{4}$	**3p**
c)	$\int_1^a f(x)e^x dx=\left.\left(x^2-3x+2\right)e^x\right\|_1^a-\int_1^a(2x-3)e^x dx=\left.\left(x^2-5x+7\right)e^x\right\|_1^a=\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e$	**3p**
	$\left(a^2-5a+7\right)e^a-3e=e^a-3e\Leftrightarrow a^2-5a+6=0$, deci $a=2$ sau $a=3$, care convin	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z=(3+2i)(3-2i)-(4-i)=3^2-(2i)^2-4+i=9+i$	**2p**
	Partea reală a numărului complex z este egală cu 9	**3p**
2.	$g(2)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(2)=f(g(2))=3\cdot 1+2=5$	**3p**
3.	$2^{\frac{6x}{3}}=2^4 \Leftrightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de trei cifre care au produsul cifrelor un număr impar are $5\cdot 5\cdot 5=125$ de elemente, deci sunt 125 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{125}{900}=\dfrac{5}{36}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram, deci $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$	**2p**
	$AC^2=AD^2+DC^2-2\cdot AD\cdot DC\cdot\cos(\sphericalangle ADC)\Rightarrow AC=2\sqrt{19}$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A	**2p**
	$AD=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=48$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3&1&-2\\0&-1&1\\2&-2&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-3+0+2-4-(-6)-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a))=3a-2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ **nu** este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, deci $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**
c)	Dacă $a=\dfrac{2}{3}$, sistemul de ecuații este incompatibil	**1p**
	Dacă $a\neq\dfrac{2}{3}$, atunci $\det(A(a))\neq 0$, deci sistemul de ecuații este compatibil determinat și, cum există y_0 și z_0 astfel încât $(2,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații, obținem $\dfrac{2(2a+1)}{3a-2}=2$	**3p**
	$a=3$, care convine	**1p**

2.a)	$2*64=\sqrt[3]{2^{\log_2 64}}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{2^6}=2^2=4$	**2p**
b)	$x*y=\sqrt[3]{x^{\log_2 y}}=x^{\frac{1}{3}\log_2 y}=\left(2^{\log_2 x}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 y}=2^{\frac{1}{3}\log_2 x\log_2 y}=$	**2p**
	$=2^{\frac{1}{3}\log_2 y\log_2 x}=\left(2^{\log_2 y}\right)^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y^{\frac{1}{3}\log_2 x}=y*x$, pentru orice $x,y\in G$, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$x*8=8*x=x$, pentru orice $x\in G\Rightarrow e=8$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**1p**
	$x*x=8\Leftrightarrow x^{\log_2 x}=8^3\Leftrightarrow \log_2 x^{\log_2 x}=\log_2\left(8^3\right)\Leftrightarrow\left(\log_2 x\right)^2=9$	**2p**
	$\log_2 x=-3$ sau $\log_2 x=3$, deci $x=\frac{1}{8}$ sau $x=8$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-4)(x-3)(x-2)+(x-5)\left((x-4)(x-3)(x-2)\right)'$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f'(5)=(5-4)(5-3)(5-2)+0=6$	**2p**
b)	$\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}=\frac{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)}=\frac{n-1}{n-5}$, unde $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 6$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{f(n+1)-1}{f(n)-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{4}{n-5}\right)^{\frac{n-5}{4}}\right)^{\frac{4n}{n-5}}=e^4$	**3p**
c)	$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$	**2p**
	f este derivabilă, deci, conform teoremei lui Rolle pe $[2,3]$, $[3,4]$ și $[4,5]$, ecuația $f'(x)=0$ are o soluție reală în fiecare dintre intervalele $(2,3)$, $(3,4)$ și $(4,5)$	**3p**
2.a)	$g(x)=\left(1+e^x\right)f(x)=1-e^x\Rightarrow\int g(x)dx=x-e^x+\mathcal{C}\Rightarrow G(x)=x-e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$G(0)=0$, deci $c=1$, de unde obținem $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=x-e^x+1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1-e^x}{1+e^x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{2e^x}{1+e^x}\right)dx=\left.\left(x-2\ln\left(1+e^x\right)\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1-2\ln(1+e)+2\ln 2=1+2\ln\frac{2}{e+1}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=\int_1^{-1} f(-x)\cos(-x)\cdot(-1)dx=\int_{-1}^1 f(-x)\cos x dx=\int_{-1}^1\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}\cos x dx=$ $=\int_{-1}^1\frac{e^x-1}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1\frac{1-e^x}{e^x+1}\cos x dx=-\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx$	**3p**
	$2\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$, deci $\int_{-1}^1 f(x)\cos x dx=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\sqrt{42}+\sqrt{7}-\sqrt{42}-\sqrt{6}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$	**2p**
	Cum $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}^2-\sqrt{6}^2}=\sqrt{7}-\sqrt{6}$, obținem că $\sqrt{7}\left(\sqrt{6}+1\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{7}+1\right)=\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$	**3p**
2.	$f(x+1)-f(x)=(x+1)^2+(x+1)+1-\left(x^2+x+1\right)=$	**2p**
	$=x^2+2x+1+x+1+1-x^2-x-1=2x+2=g(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$x-1=x^2-2x-1\Rightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui M, cu cel puțin trei elemente, este egal cu $C_5^3+C_5^4+C_5^5=$	**3p**
	$=10+5+1=16$	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$	**3p**
	Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $y-2=x+1$, deci $y=x+3$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x=2+3\sin^2 x\Leftrightarrow 4\sin x\cos x=2-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$	**3p**
	$2\sin 2x=2-1$, deci $\sin 2x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&i&0\\-1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-i+0+0-(-2i)-0-0=i$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&2\\a&i&a\\-1&a&-1\end{vmatrix}=a^2+i$, pentru orice număr real a	**2p**
	Cum, pentru orice număr real a, $a^2+i\neq 0$, obținem că $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&i^2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-I_3$	**2p**
	$\underbrace{A(0)\cdot A(0)\cdot A(0)\cdot\ldots\cdot A(0)}_{\text{de 2020 ori } A(0)}=\underbrace{(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot(-I_3)\cdot\ldots\cdot(-I_3)}_{\text{de 1010 ori } (-I_3)}=I_3$	**3p**

2.a)	$x*1=3^{x+1}-3^{x+1}-3^{1+1}+12=$ $=-9+12=3$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$0*x=3^{0+x}-3^{0+1}-3^{x+1}+12=3^x-3^{x+1}+9$, deci $3^{x+1}-3^x=18$ $3^x(3-1)=18\Leftrightarrow 3^x=9$, deci $x=2$	**3p** **2p**
c)	$x*y=3\Leftrightarrow 3^{x+y}-3^{x+1}-3^{y+1}+9=0\Leftrightarrow 3^x\left(3^y-3\right)-3\left(3^y-3\right)=0\Leftrightarrow\left(3^x-3\right)\left(3^y-3\right)=0$ $3^x-3=0$ sau $3^y-3=0$, deci $x=1$ sau $y=1$, de unde obținem $(x-1)(y-1)=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{2x}{x^2+1}=$ $=\frac{2x^3+2x-2x}{x^2+1}=\frac{2x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei la graficul funcției f în $A(a,f(a))$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, deci axa Ox, de ecuație $y=0$, este tangentă la graficul funcției f dacă și numai dacă există numărul real a astfel încât $f'(a)=0$ și $f(a)=0$ Cum $f'(0)=0$ și $f(0)=0$, obținem că axa Ox este tangentă graficului funcției f	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ f este continuă pe $\mathbb{R}$, $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$, $f(0)=0$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, deci, pentru orice număr natural nenul n, ecuația $f(x)=n$ are două soluții reale distincte	**2p** **3p**
2.a)	$\int_1^e\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\|_1^e=$ $=\ln e-\ln 1=1$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2 x^3f\left(x^2\right)dx=\int_1^2 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\|_1^2=$ $=\frac{e^4-e}{2}=\frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^e\frac{e^x}{x}dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'e^x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=e^x\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e e^x\ln x\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=$ $=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=5+2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13+5-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}+13=$	**3p**
	$=36=6^2$	**2p**
2.	$f\left(f(1)\right)+f(1)=1\Leftrightarrow f(1)+a+1+a=1\Leftrightarrow 3a+2=1$	**3p**
	$a=-\dfrac{1}{3}$	**2p**
3.	$4^x+\dfrac{4}{4^x}=4\Leftrightarrow 4^{2x}-4\cdot4^x+4=0\Leftrightarrow\left(4^x-2\right)^2=0$	**3p**
	$2^{2x}=2$, deci $x=\dfrac{1}{2}$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 2 moduri și pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 2 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor și a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege într-un singur mod, deci se pot forma $2\cdot2\cdot1=4$ numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$, unde D este mijlocul segmentului BC	**2p**
	G este centrul de greutate al triunghiului ABC, deci $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ și, cum $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AG}$, obținem $6\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}$, deci $\sin A=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	Cum ΔABC este ascuțitunghic, obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\4&3&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-6)+8-8-9-0=-15$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\a+4&a+3&a\end{vmatrix}=-15(a+1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Rangul matricei $A(a)$ nu este egal cu $3\Leftrightarrow\det\left(A(a)\right)=0$, deci $a=-1$	**3p**
c)	$A(-1)A(-1)=\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&-1\\2&-2&1\\3&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&0&0\\5&10&-5\\10&0&0\end{pmatrix}=5B$, unde $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$M=5^2B\cdot B$ și, cum matricea $B\cdot B$ are toate elementele numere întregi, obținem că matricea M are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25	**2p**

2.a)	$x*(-x)=\sqrt[3]{x^3+(-x)^3+2020}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{2020}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$(x+1)*(-x)=\sqrt[3]{(x+1)^3-x^3+2020}=\sqrt[3]{3x^2+3x+2021}$, deci $3x^2+3x+2021=2021$	**3p**
	$3x(x+1)=0$, deci $x=-1$ sau $x=0$	**2p**
c)	$\sqrt[3]{3x^3+4040}=a \Leftrightarrow 3x^3+4040=a^3 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$	**3p**
	Pentru orice număr real a, ecuația $x^3=\dfrac{a^3-4040}{3}$ are o singură soluție reală $x=\sqrt[3]{\dfrac{a^3-4040}{3}}$, deci există un unic număr real x pentru care $x*x*x=a$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12x+9=$	**3p**
	$=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=6x-12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $f''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$, obținem că funcția f este concavă pe $(-\infty,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\cdot\sqrt{x^2+3x+5}\,dx=\int_0^1 (2x+3)\,dx=\left.(x^2+3x)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_{-4}^1 f(x)\,dx=\int_{-4}^1 \dfrac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\int_{-4}^1 \dfrac{(x^2+3x+5)'}{\sqrt{x^2+3x+5}}\,dx=\left.2\sqrt{x^2+3x+5}\right\|_{-4}^1=$	**3p**
	$=2\sqrt{9}-2\sqrt{9}=0$	**2p**
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $(F(\sin x))'=F'(\sin x)\cdot(\sin x)'=f(\sin x)\cdot\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} (F(\sin x))'\,dx=\left.F(\sin x)\right\|_0^{\frac{\pi}{2}}=F(1)-F(0)=2\sqrt{1^2+3\cdot1+5}-2\sqrt{5}=6-2\sqrt{5}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 q = 2q$ și $b_3 = b_1 q^2 = 2q^2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$q^2 - 4q + 4 = 0$, deci $q = 2$	**3p**
2.	$A(f(1),1)$ aparține graficului funcției $f \Leftrightarrow f(f(1)) = 1$	**2p**
	$f(1) + m = 1 \Leftrightarrow 2m + 1 = 1$, deci $m = 0$	**3p**
3.	$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 - 1 = 1$	**2p**
	$x = -\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x = -1$, care nu convine, sau $x = 1$, care nu convine, sau $x = \sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	$b^2 = c - a$, unde $\overline{abc}$ sunt numerele cu proprietatea dată și, cum $c \leq 9$ și $a \geq 1$, obținem $b^2 \leq 8$, deci $b \in \{0,1,2\}$	**2p**
	Pentru $b = 0$, obținem $c = a$, deci sunt 9 numere, pentru $b = 1$, obținem $c = a + 1$, deci sunt 8 numere, iar pentru $b = 2$, obținem $c = a + 4$, deci sunt 5 numere; în total sunt 22 de numere cu proprietatea cerută	**3p**
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH} = \frac{1}{3}$	**2p**
	H este ortocentrul ΔABC, deci $AH \perp BC \Rightarrow m_{AH} \cdot m_{BC} = -1$, de unde obținem $m_{BC} = -3$	**3p**
6.	$\sin x - \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 2 \Rightarrow \sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2$	**2p**
	$2\sin x\cos x = -1$, deci $\sin 2x = -1$ și, cum $x \in (0,\pi)$, obținem $2x = \frac{3\pi}{2}$, deci $x = \frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 + 0 + 1 - 0 - 1 - 0 = 0$	**3p**
b)	$\det(A(m)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$, pentru orice număr real m	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(m)) \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{vmatrix} = m(m-1)$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 1 \Leftrightarrow \lvert m(m-1)\rvert = 2$, deci $m^2 - m = -2$, care nu convine, sau $m^2 - m = 2$, de unde obținem $m = -1$ sau $m = 2$, care convin	**3p**

2.a)	$x*1=2^{\ln x\cdot\ln 1}=$	**3p**
	$=2^{\ln x\cdot 0}=2^0=1$, pentru orice $x\in G$	**2p**
b)	$x*f=x\Leftrightarrow 2^{\ln x\cdot\ln f}=x\Leftrightarrow \ln x\cdot\ln f\cdot\ln 2=\ln x$, pentru orice $x\in G$, deci $\ln f\cdot\ln 2=1$, de unde obținem $\ln f=\frac{1}{\ln 2}$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}\in G$	**3p**
	$e^{\frac{1}{\ln 2}}*x=2^{\ln e^{\frac{1}{\ln 2}}\cdot\ln x}=2^{\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln x}=x$, pentru orice $x\in G$, deci $f=e^{\frac{1}{\ln 2}}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$x*\frac{1}{x}=2^{\ln x\cdot\ln\frac{1}{x}}=2^{-\ln^2 x}$, pentru orice $x\in G$	**2p**
	$2^{-\ln^2 x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \ln^2 x=1$, de unde obținem $\ln x=-1$ sau $\ln x=1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$ sau $x=e$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{e^x+1}{e^x+x-1}=$	**3p**
	$=\frac{e^x+x-1-e^x-1}{e^x+x-1}=\frac{x-2}{e^x+x-1}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+x-1\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{e^x}{e^x+x-1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{1}{1+\frac{x-1}{e^x}}=\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$, $f(2)=2-\ln\left(e^2+1\right)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și f este continuă pe $(0,+\infty)$, deci imaginea funcției f este $\left[2-\ln\left(e^2+1\right),+\infty\right)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)-\ln 1=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$	**2p**
b)	$\int\limits_{-1}^1\lvert x f(x)\rvert dx=\int\limits_{-1}^0 -x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx+\int\limits_0^1 x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\left(-\frac{x^2}{2}-\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_{-1}^0+\left(\frac{x^2}{2}+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0-1+\frac{1}{2}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-1$	**2p**
c)	Din regula lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_3 5\cdot\log_5 9=\log_3 5\cdot\left(2\log_5 3\right)=2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}^2$, deci numerele $\log_3 5$, $\sqrt{2}$ și $\log_5 9$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**2p**
2.	$g(-x)=f(-x)-f(-(-x))=f(-x)-f(x)=$	**2p**
	$=-\left(f(x)-f(-x)\right)=-g(x)$, deci funcția g este impară	**3p**
3.	$3^x+\dfrac{\sqrt{3}}{3^x}=1+\sqrt{3}\Leftrightarrow 3^{2x}-\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot 3^x+\sqrt{3}=0$	**2p**
	$\left(3^x-1\right)\left(3^x-\sqrt{3}\right)=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$	**3p**
4.	$T_{k+1}=C_{20}^k\left(x^3\right)^{20-k}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_{20}^k x^{3(20-k)+\frac{-k}{3}}=C_{20}^k x^{60-\frac{10k}{3}}$, unde $k\in\{0,1,2,\ldots,20\}$	**3p**
	$60-\dfrac{10k}{3}=10\Leftrightarrow k=15$, deci $T_{16}=C_{20}^{15}x^{10}$ îl conține pe x^{10}	**2p**
5.	$3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$	**2p**
	$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$, deci G este centrul de greutate al ΔABC	**3p**
6.	$\sin x\left(2\cos x-3\right)-\left(2\cos x-3\right)=0\Leftrightarrow\left(\sin x-1\right)\left(2\cos x-3\right)=0$	**2p**
	Cum $2\cos x-3\neq 0$ și $x\in(0,\pi)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&-1&-1\\-1&1&0\\-1&0&1\end{vmatrix}=3+0+0-1-0-1=$	**3p**
	$=3-2=1$	**2p**
b)	$\det\left(M(m)\right)=(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
	Dacă $m=1$, matricea $M(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ are rangul 1, iar dacă $m\neq 1$, atunci $\det\left(M(m)\right)\neq 0$ și matricea $M(m)$ are rangul 3, deci, pentru orice număr real m, rangul matricei $M(m)$ este diferit de 2	**3p**
c)	$M(m)\cdot A=I_3\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0\\2-m&m-1&0\\2-m&0&m-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	Obținem $m=2$, care convine	**2p**

2.a)	$(1+i)\circ(2-i)=1+i+2-i+(1+i)(2-i)=$	**3p**
	$=3+2-i+2i-i^2=6+i$	**2p**
b)	Dacă $z=a+ib$, unde a și b sunt numere reale, atunci $z\circ\overline{z}=a+ib+a-ib+(a+ib)(a-ib)=$	**3p**
	$=2a+a^2+b^2$, care este număr real, pentru orice număr complex z	**2p**
c)	$2z+z^2=-2\Leftrightarrow z^2+2z+2=0$	**2p**
	$\Delta=-4$, deci $z=-1-i$ sau $z=-1+i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}=\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\ln 1=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n=\ln\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{7}+\ln\frac{7}{13}+\ldots+\ln\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}+2\ln n=$ $=\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{13}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}\right)+\ln(n^2)=\ln\frac{1}{n^2+n+1}+\ln(n^2)=\ln\frac{n^2}{n^2+n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)+2\ln n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{n^2}{n^2+n+1}=\ln 1=0$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1(x^2+1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1-0=\frac{4}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(-x)dx=\int_0^1(x^2+1)e^x dx=\left.(x^2+1)e^x\right\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=2e-1-\left.2(x-1)e^x\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-0+(-2)=2e-3$	**2p**
c)	F este primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow -e^{-x}(-x^2+ax+b)+e^{-x}(-2x+a)=e^{-x}(x^2+1)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-(a+2)x+a-b=x^2+1$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow a=-2$ și $b=-3$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a+ib=3(a-ib)\Leftrightarrow 2a-4ib=0$, unde $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$	**3p**
	$a=0$ și $b=0$, deci $z=0$	**2p**
2.	$f^2(2)=f(0)f(1)\Leftrightarrow (4+a)^2=a(2+a)\Leftrightarrow a^2+8a+16=a^2+2a$	**2p**
	$6a=-16$, deci $a=-\dfrac{8}{3}$	**3p**
3.	$-x=x^2-2x-2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**2p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=2$, care nu convine	**3p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$ are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=$	**2p**
	$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$	**3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Leftrightarrow \sin A=\dfrac{BC}{2R}$	**2p**
	$BC=R\Rightarrow \sin A=\dfrac{1}{2}$ și, cum ΔABC este ascuțitunghic , obținem $m(\sphericalangle A)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1-0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$B(a)=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=\begin{pmatrix}0 & 0 & a^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=O_3$, pentru orice număr real a	**2p**

c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\det A(2)\neq 0$, $\left(A(2)\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obținem că $X=\begin{pmatrix} n & \frac{n(n+1)}{2}-2n & 4n-n(n+1) \\ 0 & n & \frac{n(n+1)}{2}-2n \\ 0 & 0 & n \end{pmatrix}$	**3p**
	Suma elementelor matricei X este egală cu $3n$, deci $3n=21\Leftrightarrow n=7$, care convine	**2p**
2.a)	$1*2=1^2+4\cdot 1\cdot 2+2^2=$	**3p**
	$=1+8+4=13$	**2p**
b)	$x*x=x^2+4x\cdot x+x^2=6x^2$, $(x*x)*x^2=\left(6x^2\right)*x^2=36x^4+24x^4+x^4=61x^4$	**3p**
	$61x^4=61\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	$x*1=x^2+4x+1=x^2+4x+4-3=(x+2)^2-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\sqrt{p}-2$, unde p este număr prim, $p\geq 3$, obținem că $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $a*1=p-3\in\mathbb{N}$, deci există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a*1$ este natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+3}-(x-3)\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+3-x^2+3x}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}=\dfrac{3(x+1)}{\left(x^2+3\right)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+3}}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-6x+9}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x}{2}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x(6-6x)}{2\left(x^2+3\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{6-6x}{x^2+3}\right)^{\frac{x^2+3}{6-6x}}\right)^{\frac{x^2\left(\frac{6}{x}-6\right)}{2x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}=e^{-3}$	**2p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=-2$, obținem că $f(x)\geq -2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x-3\geq -2\sqrt{x^2+3}\Leftrightarrow x+2\sqrt{x^2+3}\geq 3$, pentru orice număr real x, deci $x^5+2\sqrt{x^{10}+3}\geq 3$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int\limits_1^3 x^2dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\vert_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{26}{3}$	**2p**

b)	$\int_1^2 \left(f(x)-x^2\right)dx=\int_1^2 \ln x\,dx = x\ln x\Big\vert_1^2-\int_1^2 x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2\ln 2 - x\Big\vert_1^2 = 2\ln 2-2+1=2\ln 2-1$	**2p**
c)	$\int_1^2 \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2}+\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(x^{-3}-\frac{1}{x}\ln x\right)dx=\left(\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{1}{2}\ln^2 x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\ln^2 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln^2 1=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\ln^2 2=\frac{3-4\ln^2 2}{8}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-3<-\sqrt{5}<-2$ și $2<\sqrt{7}<3$, deci $A=\{-2,-1,0,1,2\}$	**3p**
	Mulțimea A are 5 elemente	**2p**
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{2}{2}=\frac{-2b}{-2}$ și $\frac{4a-4}{4}=\frac{4b^2+4}{4}$	**3p**
	$b=1$, deci $a=3$	**2p**
3.	$1+x+1-x+3\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}\right)=8$ și, cum $\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}=2$, obținem $2+6\cdot\sqrt[3]{1+x}\cdot\sqrt[3]{1-x}=8$	**3p**
	$\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}=1$, deci $x=0$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale unei mulțimi cu n elemente, $n\geq 2$, este egal cu $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=12\Leftrightarrow n^2-n-24=0$, care nu are nicio soluție număr natural	**3p**
5.	$m_{AH}=3$ și $m_{BC}=-\frac{1}{3}\Rightarrow m_{AH}\cdot m_{BC}=-1$, deci $AH\perp BC$	**2p**
	$m_{BH}=\frac{1}{2}$ și $m_{AC}=-2\Rightarrow m_{BH}\cdot m_{AC}=-1$, deci $BH\perp AC$ și, cum $AH\cap BH=\{H\}$, obținem că H este ortocentrul triunghiului ABC	**3p**
6.	$2\left(\cos^2x-\sin^2x\right)\left(\cos^2x+\sin^2x\right)=-1$, deci $2\left(2\cos^2x-1\right)=-1$	**3p**
	$\cos^2x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{vmatrix}=36+36+36-36-36-36=$	**3p**
	$=108-108=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}30&20&10\\60&40&20\\90&60&30\end{pmatrix}=10A\Rightarrow\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)\cdot B=I_3+A-\frac{1}{11}A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$	**3p**
	$B\cdot\left(I_3-\frac{1}{11}A\right)=I_3-\frac{1}{11}A+A-\frac{1}{11}A\cdot A=I_3+\frac{10}{11}A-\frac{10}{11}A=I_3$, deci matricea $I_3-\frac{1}{11}A$ este inversa matricei B	**2p**

c)	Considerăm $U=\begin{pmatrix}4&2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $V=\begin{pmatrix}0&0&0\\6&5&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $T=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\9&6&4\end{pmatrix}$, pentru care $\operatorname{rang}U=1$, $\operatorname{rang}V=1$ și $\operatorname{rang}T=1$	**3p**
	Cum $U+V+T=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}4&2&1\\6&5&2\\9&6&4\end{pmatrix}$, obținem că matricele $U,V,T\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ au rangul 1 și $U+V+T=B$	**2p**
2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot1-3\cdot(-1)-3\cdot1+a=a-1$	**3p**
	$a-1=0\Leftrightarrow a=1$	**2p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow xe-3x-3e+a=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x(e-4)-3e+a=0$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=4$ și $a=12$	**3p**
c)	$x*y=xy-3x-3y+9+a-9=(x-3)(y-3)+a-9$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice $x,y\in[3,+\infty)$, $x-3\geq0$ și $y-3\geq0$ și, cum $a\in[12,+\infty)$, obținem $x*y\geq3$, deci mulțimea $[3,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x+1}\right)'-\left(\sqrt{x}\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}-1\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(n)\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}-\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{\sqrt{n}}=$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right)^{2\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n+1}}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$	**3p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}>0$, deci $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,+\infty)$, deci f este injectivă	**2p**
	$\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, f monotonă și continuă pe $(0,+\infty)$, deci $\operatorname{Im}f=(0,1)\Rightarrow f$ este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^4+1\right)f(x)dx=\int_0^1 x^2\,dx=\left.\dfrac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^2\leq x$, deci $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\dfrac{x^2}{x^4+1}dx\leq\int_0^1\dfrac{x}{x^4+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2+1}dx=\left.\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**

c)	$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 x'F(x)dx = xF(x)\Big\|_0^1 - \int_0^1 x f(x)dx = F(1) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1}dx =$	**3p**
	$= -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{(x^4+1)'}{x^4+1}dx = -\frac{1}{4}\ln(x^4+1)\Big\|_0^1 = -\frac{1}{4}\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+2=0 \Rightarrow z\neq 0$ și $z+\frac{2}{z}=-1$	**2p**
	$\left(z+\frac{2}{z}\right)^2=1$, deci $z^2+4+\frac{4}{z^2}=1$, de unde obținem $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$	**3p**
2.	$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left\{2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}=\{2x+1\}=$	**2p**
	$=\{2x\}=f(x)$, pentru orice număr real x	**3p**
3.	$3^x(3-1)=2^{x+1}(2-1)\Leftrightarrow 2\cdot 3^x=2^{x+1}\Leftrightarrow 3^x=2^x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A astfel încât 3, 4 și a să fie lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic sunt $\sqrt{7}$ (dacă a este lungimea unei catete) și $\sqrt{25}$ (dacă a este lungimea ipotenuzei), deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{23}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$, deci $\overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele D, M și N sunt coliniare	**3p**
6.	$\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}=\frac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}$	**2p**
	Cum $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}<\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}$, obținem $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & m & 1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=2m+(-6)+2-m-(-3)-8=$	**3p**
	$=m+5-14=m-9$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	Sistemul de ecuații este omogen, deci admite soluții diferite de $(0,0,0)\Leftrightarrow\det(A(m))=0$	**3p**
	$m=9$	**2p**

c)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&9&1\\1&-3&2\end{pmatrix}$, $\det\left(A(9)\right)=0$ și $\begin{vmatrix}1&2\\2&9\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rang}\left(A(9)\right)=2$, deci soluțiile nenule ale sistemului de ecuații sunt de forma $\left(-\frac{7}{5}\alpha,\frac{1}{5}\alpha,\alpha\right)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}^*$	**3p**
	$\frac{x_0^2+y_0^2-z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}=\frac{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}-\alpha^2}{\frac{49\alpha^2}{25}+\frac{\alpha^2}{25}+\alpha^2}=\frac{25\alpha^2}{75\alpha^2}=\frac{1}{3}$	**2p**
2.a)	$2*(-1)=2\cdot(-1)+5\cdot 2+5\cdot(-1)+20=$	**3p**
	$=-2+10+(-5)+20=23$	**2p**
b)	$x*(-4)=x\cdot(-4)+5x+5\cdot(-4)+20=-4x+5x+(-20)+20=x$, pentru orice număr întreg x	**3p**
	$(-4)*x=(-4)\cdot x+5\cdot(-4)+5x+20=-4x+(-20)+5x+20=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=-4$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	Cum $0\circ 0=20$, $0\in A(0)$ și $20\notin A(0)$, mulțimea $A(0)$ nu este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”	**1p**
	$x,y\in A(1)\Rightarrow x=3m+1$ și $y=3n+1$, unde $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9mn+18m+18n+31\in A(1)$, deci $A(1)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=1$ convine	**2p**
	$x,y\in A(2)\Rightarrow x=3k+2$ și $y=3l+2$, unde $k,l\in\mathbb{N}\Rightarrow x*y=9kl+21k+21l+44\in A(2)$, deci $A(2)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea de compoziție „$*$”, deci $r=2$ convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-e+(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x-e+xe^x-e^x=xe^x-e$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=(x+1)e^x>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f'$ strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$ și, cum $f'(1)=0$, obținem că $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,1)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Cum f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$, f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și f este continuă în $x_0=1$, obținem că $x_0=1$ este punctul de extrem al funcției f	**2p**
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{\ln(x+2)}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\text{arctg}\,x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\text{arctg}1-\text{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
b)	Din regula lui l’Hospital, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+2)}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)+\frac{\text{arctg}\,x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+1}\cdot\ln(x+2)+\text{arctg}\,x\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(\text{arctg}\,x\cdot\ln(x+2)\right)'dx=$	**3p**
	$=\text{arctg}\,x\cdot\ln(x+2)\Big\|_0^1=\text{arctg}1\cdot\ln 3-\text{arctg}0\cdot\ln 2=\frac{\pi}{4}\ln 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-6z+10=(3+i)^2-6(3+i)+10=9+6i+i^2-18-6i+10=$	**3p**
	$=9+(-1)-8=0$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-4x=x^2+2x-6\Leftrightarrow -6x=-6$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$2x+3=(x+1)^2\Rightarrow 2x+3=x^2+2x+1\Rightarrow x^2=2$	**2p**
	$x=-\sqrt{2}$, care nu convine sau $x=\sqrt{2}$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor un număr prim sunt 12, 21, 13, 31, 15, 51, 17 și 71, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{8}{90}=\dfrac{4}{45}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului $AM\Rightarrow x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2}$ și $y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2}$, deci $M(7,-4)$	**2p**
	M este mijlocul segmentului $BN\Rightarrow x_M=\dfrac{x_B+x_N}{2}$ și $y_M=\dfrac{y_B+y_N}{2}$, deci $N(11,-7)$	**3p**
6.	$\sin x+\cos x=\cos 2x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=\cos^2 x-\sin^2 x\Leftrightarrow \sin x+\cos x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$	**3p**
	Cum $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, obținem $\cos x-\sin x=1$, deci $\sin x-\cos x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}2^x&0&0\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^y&0&0\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x\cdot 2^y&0&0\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2^{x+y}&0&0\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$B=A(1+2+3)-I_3=A(6)-I_3=\begin{pmatrix}2^6-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	Cum $\det B=0$ și $\begin{vmatrix}2^6-1 & 0\\ 0 & 12\end{vmatrix}=12\left(2^6-1\right)\neq 0$, obținem că rangul matricei B este egal cu 2	**3p**
2.a)	$1*1=1^2\cdot 1^2-2\cdot 1^2-2\cdot 1^2+6=$	**3p**
	$=1-2-2+6=3$	**2p**
b)	$x^2y^2-2x^2-2y^2+6=2\Leftrightarrow x^2\left(y^2-2\right)-2\left(y^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)=0$	**3p**
	$x^2=2$ sau $y^2=2$, ceea ce este imposibil pentru orice numere raționale x și y, deci $x*y\neq 2$	**2p**
c)	$m^2n^2-2m^2-2n^2+6=3\Leftrightarrow m^2n^2-2m^2-2n^2+4=1\Leftrightarrow\left(m^2-2\right)\left(n^2-2\right)=1$	**2p**
	m și n sunt numere întregi $\Rightarrow m^2-2=n^2-2=-1$ sau $m^2-2=n^2-2=1$, deci $m^2=n^2=1$ sau $m^2=n^2=3$, de unde obținem perechile de numere întregi $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x+2-\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x^2+4x+2-2}{x+1}=\dfrac{2x(x+2)}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum dreapta de ecuație $y=3x+2020$ are panta egală cu 3, obținem $f'(a)=3$	**2p**
	$\dfrac{2a(a+2)}{a+1}=3\Leftrightarrow 2a^2+a-3=0$ și, cum $a\in(-1,+\infty)$, obținem $a=1$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\geq f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$x^2+2x\geq 2\ln(x+1)\Leftrightarrow(x+1)^2\geq 2\ln(x+1)+1$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3 f^2(x)dx=\int_0^3\left(x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9+6=15$	**2p**
b)	$\displaystyle 0\leq I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx\leq\sqrt{3}\int_0^1 x^n\,dx=\sqrt{3}\cdot\left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Cum $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, obținem $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$\displaystyle I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+2}\,dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+2\right)}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 x^{n+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1 x^{n-1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx=$	**2p**
	$\displaystyle=\int_0^1 x^{n+1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx+2\int_0^1 x^{n-1}\left(\sqrt{x^2+2}\right)'dx=\sqrt{3}-(n+1)I_n+2\sqrt{3}-2(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n+2(n-1)I_{n-2}=3\sqrt{3}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_4 = b_1 q^3 = 2\cdot\sqrt{5}^3 = 10\sqrt{5} = \sqrt{500}$	**2p**
	$484 < 500 < 529 \Rightarrow 22 < \sqrt{500} < 23$, deci partea întreagă a lui b_4 este egală cu 22	**3p**
2.	$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(f(x)) = x \Leftrightarrow 2f(x) - 3 = x \Leftrightarrow 2(2x-3) - 3 = x$	**3p**
	$x = 3$	**2p**
3.	$\log_2 \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+2} = 2 \Rightarrow 2x^2+x+1 = 2x^2-2x+4$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au suma cifrelor un număr divizibil cu 11 sunt 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 și 92, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{90} = \frac{4}{45}$	**1p**
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (1+a)\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \lvert\vec{u}+\vec{v}\rvert^2 = (1+a)^2 + 1$	**2p**
	Cum $\lvert\vec{u}\rvert^2 = 2$ și $\lvert\vec{v}\rvert^2 = a^2+4$, obținem $a^2+2a+2 = 2+a^2+4$, deci $a=2$	**3p**
6.	$(\sin x + \cos x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 2\cos^2 x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x$	**2p**
	$\operatorname{tg} 2x = 1$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $2x = \frac{\pi}{4}$, deci $x = \frac{\pi}{8}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0+2+1-1-0-2 = 0$	**3p**
b)	Dacă $m=-3$ și (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $\begin{cases} -3x_0 + y_0 + z_0 = 1 \\ 2x_0 - 2y_0 + z_0 = 2 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = -2 \end{cases}$	**2p**
	Prin adunarea celor trei relații, obținem $0=1$, ceea ce este imposibil, deci, pentru $m=-3$, sistemul de ecuații nu are soluții	**3p**
c)	$\det(A(m)) = m^3 + 2m^2 - 3m = m(m-1)(m+3)$, pentru orice număr real m	**1p**
	Dacă $m=0$, atunci $\begin{cases} y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$, care nu are soluții, dacă $m=1$, atunci $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+z=2 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$, care nu are soluții	**2p**

	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,1\}\Rightarrow\det\left(A(m)\right)\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică și, cum pentru $m=-3$, sistemul nu are soluții, obținem că sistemul de ecuații are cel mult o soluție	2p
2.a)	$(1+i)\circ(1-i)=1+i+1-i-\frac{1}{2}(1-i)-\frac{1}{2}(1+i)=$	3p
	$=2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=1$	2p
b)	$z_1,z_2\in H\Rightarrow z_1=2+bi$ și $z_2=2+ci$, $b,c\in\mathbb{R}\Rightarrow z_1\circ z_2=2+bi+2+ci-\frac{1}{2}(2-bi)-\frac{1}{2}(2-ci)=$	3p
	$=4+bi+ci-1+\frac{1}{2}bi-1+\frac{1}{2}ci=2+\frac{3}{2}(b+c)i\in H$, deci H este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”	2p
c)	Dacă $z_0=a+ib$, cu $a,b\in\mathbb{R}$, pentru $z=x-ib$, unde x este număr real oarecare, obținem $z_0\circ z=a+ib+x-ib-\frac{1}{2}(a-ib)-\frac{1}{2}(x+ib)=$	3p
	$=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}x\in\mathbb{R}$, deci există o infinitate de numere complexe z cu proprietatea că numărul $z_0\circ z$ este real	2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\left(x^3-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3x^2-3\right)=$	3p
	$=\frac{1}{3}\frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$, $x\in(1,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^3}}=$	3p
	$=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\frac{x+2}{x-1}}=+\infty$	2p
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare, deci injectivă	2p
	$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci pentru orice $a\in(0,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	3p
2.a)	$\int_1^4 e^x f(x)dx=\int_1^4\left(x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right\|_1^4=$	3p
	$=\frac{4^3}{3}+8-\frac{1}{3}-2=21+6=27$	2p
b)	$\int_1^e f(\ln x)dx=\int_1^e\frac{\ln^2 x+2}{e^{\ln x}}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\left(\ln^2 x+2\right)dx=\left.\left(\frac{1}{3}\ln^3 x+2\ln x\right)\right\|_1^e=$	3p
	$=\frac{1}{3}\ln^3 e+2\ln e-\frac{1}{3}\ln^3 1-2\ln 1=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3}$	2p
c)	Dacă F este o primitivă a lui f, atunci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$	2p
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{e^x}=2$	3p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Cum $2-3i=\overline{2+3i}$, $A=z(2+3i)+\overline{z}\cdot\overline{2+3i}=$	**2p**
	$=z(2+3i)+\overline{z(2+3i)}\in\mathbb{R}$, deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său	**3p**
2.	$f(3+\sqrt{2})=(3+\sqrt{2})^2-6(3+\sqrt{2})+7=9+6\sqrt{2}+2-18-6\sqrt{2}+7=9+2-18+7=$	**3p**
	$=0$, deci $f(\sqrt{2})\cdot f(1+\sqrt{2})\cdot f(2+\sqrt{2})\cdot\ldots\cdot f(10+\sqrt{2})=0$	**2p**
3.	$\lg(x^2+x-2)=\lg\left(10\cdot\frac{x-1}{2}\right)\Rightarrow x^2+x-2=5x-5\Rightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x=1$, care nu convine, sau $x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât 51 sunt 69, 96, 78, 87, 79, 97, 88, 89, 98 și 99, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{10}{90}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$AM=5$, $BM=5$, $CM=5$	**3p**
	$AM=BM=CM$, deci punctul M este centrul cercului circumscris ΔABC	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow\sin A+\sin B+\sin C=\frac{BC}{2R}+\frac{AC}{2R}+\frac{AB}{2R}\Rightarrow\frac{AB+AC+BC}{2R}=\frac{1}{rR}$	**3p**
	$p=\frac{1}{r}$ și, cum $r=\frac{S}{p}$, obținem $S=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&1&0\\4&1&0\\1&0&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-0-(-4)-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(m))=2(1-m)(1+m)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\Rightarrow\det(A(m))\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(1,\frac{2}{m+1},\frac{2}{m+1}\right)$, unde $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**
	$\frac{y_0}{z_0}=\frac{\frac{2}{m+1}}{\frac{2}{m+1}}=1=x_0$, pentru orice $m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**2p**

2.a)	$2*(-2)=2\cdot\sqrt{(-2)^2+1}+(-2)\cdot\sqrt{2^2+1}=$	**3p**
	$=2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=0$	**2p**
b)	$x*0=x\sqrt{0^2+1}+0\cdot\sqrt{x^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=0\cdot\sqrt{x^2+1}+x\sqrt{0^2+1}=x\sqrt{1}=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$f(x)*f(y)=f(x)\sqrt{f^2(y)+1}+f(y)\sqrt{f^2(x)+1}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\right)^2+1}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\right)^2+1}=$	**2p**
	$=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\sqrt{\left(\frac{e^{2y}+1}{2e^y}\right)^2}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\sqrt{\left(\frac{e^{2x}+1}{2e^x}\right)^2}=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y}+1}{2e^y}+\frac{e^{2y}-1}{2e^y}\cdot\frac{e^{2x}+1}{2e^x}=\frac{e^{2(x+y)}-1}{2e^{x+y}}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{x^2+1}-e^x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-xe^x}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}=\frac{e^x\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{1}=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=2$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f$ este strict crescătoare	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și f este continuă, deci $\operatorname{Im} f=(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}1-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$	**2p**
b)	$0<\frac{1}{x^2+4}\leq\frac{1}{4}$, deci $0<\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n\leq\frac{1}{4^n}$, pentru orice $x\in[0,1]$ și orice număr natural n, deci $0\leq\int_0^1\left(\frac{1}{x^2+4}\right)^n dx\leq\int_0^1\frac{1}{4^n}dx$, de unde obținem $0\leq I_n\leq\frac{1}{4^n}$, pentru orice număr natural n	**3p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{4^n}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**
c)	$\int_0^a x f(x)dx=\int_0^a\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int_0^a\frac{\left(x^2+4\right)'}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\Big\|_0^a=\frac{1}{2}\ln\left(a^2+4\right)-\frac{1}{2}\ln 4=\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln\frac{a^2+4}{4}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}\Leftrightarrow a^2+4=5$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**2p**