Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 3$ şi raţia $r = 2$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ şi $C(-2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
5p	**6.** Calculaţi $\operatorname{ctg} a$, ştiind că $\sin a = \frac{1}{3}$ şi $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Calculaţi $\det(A(3))$.
5p	**b)** Arătaţi că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.
	2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ şi $a \in \mathbb{Z}_5$.
5p	**a)** Calculaţi $f(\hat{0})$.
5p	**b)** Determinaţi $a \in \mathbb{Z}_5$, ştiind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.
5p	**c)** Arătaţi că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
	2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x = 16\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2 - 5n + 6 = 0$.

5p **5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = 6\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $(2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - 4\sin 2x = 5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(2A) = -28$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y, știind că $A + 2B = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Dacă $AB = BA$, arătați că $\det B \leq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 1 = -1$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a \circ b = 8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = (x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f'(x) \geq -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = 3$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + \ln x + 2016$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este mai mic decât 14π.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2+2i=0$.
5p	**2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2017$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2017$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta de ecuaţie $y=x-10$.
5p	**6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ şi $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $\det(A(0))$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p	**c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
5p	**a)** Calculați $\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx$.
5p	**b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n \in \mathbb{N} \mid n(n+2) < 14\}$ este egală cu 3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0)=1$ și $f(x+1)=f(x)+2$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+5)^2-9>0$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ și $C(-1,3)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE=4$ și $DF=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A = 2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A = xA + yI_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B = A + I_3$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y = x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 9 = 16$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3 = 25$.

5p **c)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx = 1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

SUBIECTUL al III-lea –- Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=8$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=12$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+10}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1,1)\right)=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A\left(-ab,a^2+b^2\right)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det\left(A(m,n)\right)=1$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$.

5p **a)** Arătați că $f'(0)=0$.

5p **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.