Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_{2015} = 2015 + 2014 \cdot (-1) =$ $= 1$	**3p** **2p**
2.	$f(2) = -3 \Leftrightarrow -4m + 5 = -3$ $m = 2$	**3p** **2p**
3.	$x + 1 - 2\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{x-1} + x - 1 = 2 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x^2 - 1}$ $x = 1$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Sunt 3 pătrate perfecte în mulțime, deci sunt $C_3^2 = 3$ cazuri favorabile Sunt $C_9^2 = 36$ de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	**2p** **1p** **2p**
5.	Diagonalele paralelogramului $OABC$ se înjumătățesc, deci $x_A + x_C = x_O + x_B \Rightarrow x_B = 6$ $y_A + y_C = y_O + y_B \Rightarrow y_B = 0$	**3p** **2p**
6.	$AD = 3$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 16 + 6 - 0 - 2 + 12 = 0$	**2p** **3p**
b)	$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 0 & -1-x & -1-x \\ 0 & -2-x & x^2-4 \end{vmatrix} = -(x+1)(x+2)\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & x-2 \end{vmatrix} =$ $= -(x+1)(x+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} = -(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$\left(2^x - 4\right)\left(2^x - 2\right)\left(2^x - 1\right) = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ și $x_3 = 2$	**2p** **3p**
2.a)	$X(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $X(1) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $X(-1) + X(1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2X(0)$	**3p** **2p**

b)	$X(a)\cdot X(b)=\begin{pmatrix}1+3a & -6a\\ a & 1-2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+3b & -6b\\ b & 1-2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3a+3b+3ab & -6a-6b-6ab\\ a+b+ab & 1-2a-2b-2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ a+b+ab & 1-2(a+b+ab)\end{pmatrix}=X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(X(a))=1+a$	**2p**
	$\det(X(a))=0\Leftrightarrow a=-1$, deci matricea $X(a)$ este inversabilă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2}{x-1}=$	**2p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{(x-1)(x-2)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-1}=0$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=1$, deci dreapta de ecuaţie $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	f este continuă în $x=-1\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)=f(-1)$	**2p**
	$-2=-2-a+3-4\Leftrightarrow a=-1$	**3p**
b)	$x\le -1\Rightarrow x+1\le 0\Rightarrow e^{x+1}\le e^0$	**2p**
	$e^{x+1}-3\le 1-3\Rightarrow f(x)\le -2\Rightarrow f(x)+2\le 0$, pentru orice $x\le -1$	**3p**
c)	$f(x)=2x^3-4x-4$, $f(0)=-4$ și $f(2)=4$	**3p**
	Cum f este continuă pe $[0,2]$ și $f(0)\cdot f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[0,2]$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=i(1+i)^2=2i^2=$	**2p**
	$=-2$, deci partea reală a numărului complex z este egală cu -2	**3p**
2.	$-\frac{m^2-4}{4}=-1 \Leftrightarrow m^2-8=0$	**3p**
	$m=-2\sqrt{2}$ sau $m=2\sqrt{2}$	**2p**
3.	$2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0 \Leftrightarrow \left(2^x-1\right)\left(2^x+4\right)=0$	**3p**
	Deoarece $2^x>0$, soluția ecuației este $x=0$	**2p**
4.	$5, 15, 25, \ldots, 2005$ și 2015 sunt numerele din mulţimea M care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10	**2p**
	În mulţimea M sunt 202 numere care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10	**3p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului MC	**2p**
	$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\sin x \Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)=0$	**2p**
	Cum $x\in[0,\pi]$, obținem $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ sau $x=\pi$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2016)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2015&2016&2016\\2015^2&2016^2&2016^2\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(2016)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2015&2016&2016\\2015^2&2016^2&2016^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(x)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1\\2015&2016&x\\2015^2&2016^2&x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\2015-x&2016-x&x\\2015^2-x^2&2016^2-x^2&x^2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(2015-x)(2016-x)\begin{vmatrix}1&1\\2015+x&2016+x\end{vmatrix}=(2015-x)(2016-x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$\det\left(A(x)\right)=x^2-(2015+2016)x+2015\cdot 2016$	**2p**
	$\det\left(A(x)\right)$ are valoarea minimă pentru $x=\frac{4031}{2}$	**3p**

2.a)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & (-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\\ 1\cdot(-1)+1\cdot 1 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+(a+b)A+abA\cdot A=$	**3p**
	$=I_2+(a+b)A=X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$M=X\left((-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4\right)=X(4)$	**2p**
	Cum $X(4)\cdot X(-4)=X(0)=I_2$, inversa matricei M este matricea $X(-4)=\begin{pmatrix}5 & 4\\ -4 & -3\end{pmatrix}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{mx^2+4x-m}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(m(x+1)+\frac{4x}{x-1}\right)=$	**3p**
	$=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$y=3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=3$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{mx^2+4x-m}{x(x-1)}=m$, obținem $m=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\frac{-x^2+4x+1}{x-1}-5}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x^2-x+6}{(x-1)(x-2)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x-3}{x-1}=-5$	**3p**
2.a)	$f(-1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	$f(4)=2\Rightarrow f(-1)\cdot f(4)=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(\frac{x}{2}+2a\right)=1+2a$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(ax+\log_2 x\right)=2a+1$ și $f(2)=2a+1$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a	**3p**
	Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f(-1)\cdot f(4)=\left(-\frac{1}{2}+2a\right)(4a+2)=(4a-1)(2a+1)$	**2p**
	Deoarece f este continuă și pentru orice $a\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ avem $f(-1)\cdot f(4)<0$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(x+2)+2x=2\cdot 7$	**2p**
	$x=4$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2(m-1)$, $x_1x_2=2m^2-2m \Rightarrow x_1^2+x_2^2=-4m+4$	**3p**
	$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4 \Leftrightarrow -\frac{2}{m}=4$, deci $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
3.	$5^{2x}=5^{3-x} \Leftrightarrow 2x=3-x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii M este egal cu C_{10}^2, deci sunt 45 de cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale mulțimii M, care conțin elementul 10, este egal cu 9, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$m_{AB}=2$, $m_{BC}=a-3$	**2p**
	$m_{AB}=m_{BC} \Leftrightarrow a=5$	**3p**
6.	$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2 x=1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $\cos x=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, deci $2\sqrt{2}\operatorname{tg} x+1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3))=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}\frac{x+1}{2}&\frac{x-1}{2}\\\frac{x-1}{2}&\frac{x+1}{2}\end{vmatrix}=\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2=x$	**2p**
	$\det(A(y))=y$ și $\det(A(xy))=xy$, deci $\det(A(x))\cdot\det(A(y))=\det(A(xy))$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(1)+A(2)+\ldots+A(n)=\begin{pmatrix}\frac{n(n+3)}{4}&\frac{n(n-1)}{4}\\\frac{n(n-1)}{4}&\frac{n(n+3)}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=\frac{n^2(n+1)}{2}=$	**3p**
	$=n\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(1+2+\ldots+n)=n\left(\det(A(1))+\det(A(2))+\ldots+\det(A(n))\right)$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

2.a)	$A-B=\begin{pmatrix}1-1 & 3-0\\ 0-2 & 8-1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & 7\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$(A+I_2)\cdot(B-I_2)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 18 & 0\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
c)	Pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale, $X\cdot A=A\cdot X\Rightarrow c=0$ și $3a+7b=3d$	**2p**
	$X\cdot B=B\cdot X\Rightarrow b=0$ și $a=d$, deci $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=aI_2$ și obținem $X\cdot Y=aY=Y\cdot X$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+7x+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x+6)=$	**3p**
	$=5$	**2p**
b)	$y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției $f\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x+6}{x+1}=2\Leftrightarrow a=3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+ax+6}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{a}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}=$	**2p**
	$=+\infty$, deci, oricare ar fi numărul real a, funcția f **nu** admite asimptotă orizontală spre $+\infty$	**3p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{2mx}{2-x}=-m$, $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(2x+4-m)=-m$ și $f(-2)=-m$, deci funcția f este continuă în $x=-2$, pentru orice număr real m	**3p**
	Cum, pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,-2)$ și pe $(-2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	Pentru $x\in(-\infty,-2)$, $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{2x}{2-x}=0\Leftrightarrow x=0\notin(-\infty,-2)$	**3p**
	Pentru $x\in[-2,+\infty)$, $f(x)=0\Leftrightarrow 2x+3=0\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}\in[-2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2mx}{2-x}=-2m$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+4-m-2x)=4-m$, obținem $m=-4$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=\log_5(7\cdot 35)-\log_5\left(\frac{7}{25}\right)^2=$	**2p**
	$=\log_5\left(7\cdot 35\cdot\frac{25^2}{7^2}\right)=\log_5\left(5^5\right)=5\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$S=f\left(f(1)\right)+f\left(f(2)\right)+\ldots+f\left(f(10)\right)=5+6+7+\ldots+14=$	**3p**
	$=95$	**2p**
3.	$\log_2\left(x^2+1\right)+\log_2 8=\log_2\left(7x^2+9\right)\Rightarrow 8\left(x^2+1\right)=7x^2+9\Rightarrow x^2=1$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 4 elemente, deci sunt 4 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 numere reale, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{MN}=(n-1)\vec{i}+(3-n)\vec{j}$, $\overrightarrow{MP}=(2n-1)\vec{i}+(5-n)\vec{j}$	**2p**
	$\frac{n-1}{2n-1}=\frac{3-n}{5-n}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**3p**
6.	$\cos\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{6}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}$	**2p**
	$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x+\cos x\cos\frac{\pi}{6}-\sin x\sin\frac{\pi}{6}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(-1)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(-1)\right)=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=18+3+(-4)-(-9)-12-2=12$	**3p**
b)	$\det\left(X(a)-I_3\right)=\begin{vmatrix}1&4&1\\3&8&1\\a&a^2&0\end{vmatrix}=2a^2-4a$	**3p**
	$2a^2-4a=0\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p**
c)	$\Delta=\begin{vmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{vmatrix}=a^2-5a+6$ și, cum ABC este triunghi, obținem $a^2-5a+6\neq 0$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, deci $\lvert a^2-5a+6\rvert<6$ și, cum a este număr natural, obținem $a=1$ sau $a=4$	**3p**

2.a)	$M(x)M(y)=\begin{pmatrix}1+3y+3x+9xy-9xy & 3y+9xy+3x-9xy\\ -3x-9xy-3y+9xy & -9xy+1-3y-3x+9xy\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1+3(x+y) & 3(x+y)\\ -3(x+y) & 1-3(x+y)\end{pmatrix}=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$M(x)M(-x)=M(x+(-x))=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x $M(-x)M(x)=M((-x)+x)=M(0)=I_2$, pentru orice număr real x, deci inversa matricei $M(x)$ este matricea $M(-x)=\begin{pmatrix}1-3x & -3x\\ 3x & 1+3x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$M\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+5}\right)=M(5)$, deci $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}=5$ $x=4$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1}{x}=\frac{3}{2}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2}{x^2}=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-2}{x}=-1$, deci dreapta de ecuație $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{m^2x^2-mx-2}{mx}\cdot\frac{x}{x^2-x-2}\right)=m$ Cum m este nenul, din $m=m^2-m$, obținem $m=2$, deci există un singur număr natural nenul m care verifică relația	**3p** **2p**
2.a)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4\left(x^2-ax+2a-4\right)}{1-4x+4x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4x^2-4ax+8a-16}{4x^2-4x+1}=1$, pentru orice număr real a	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\left(x^2-ax+2a-4\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(2^{x-1}-2\right)=0$ și, cum $f(2)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)$, deci funcția f este continuă în $x=2$, pentru orice număr real a Cum, pentru orice număr real a, funcția f este continuă pe $(-\infty,2)$ și pe $(2,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	$f(1)=a-3$, $f(3)=2$ Pentru orice număr real a, $a<3$, $f(1)\cdot f(3)<0$ și, cum funcția f este continuă, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XI-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I
- **Pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**C**	**5p**
2.	**C**	**5p**
3.	**B**	**5p**
4.	**A**	**5p**
5.	**D**	**5p**
6.	**A**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$D(1)=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+6+6-3-0-4=5$	**3p**
b)	$D(p)=p^2(6-p)$, pentru orice număr întreg p	**3p**
	Numerele p și $6-p$ sunt întregi, deci numărul întreg $D(p)$ este divizibil cu $6-p$	**2p**
c)	$D(n)=n^2(6-n)$, deci pentru $n=0$ și pentru orice $n\geq 6$, obținem $D(n)\leq 0$ și, cum n este număr natural, valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$ se obține pentru una dintre valorile $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$ sau $n=5$	**3p**
	Valoarea maximă este $D(4)=32$	**2p**
2.a)	$B(1)+B(3)=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=2B(2)$	**2p**
b)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix} x-1 & -x \\ 0 & -x-1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$B(x)\cdot A=\begin{pmatrix} -x-1 & 0 \\ -x & x-1 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix} x-1 & -x \\ 0 & -x-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x-1 & 0 \\ -x & x-1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$	**1p**

c)	$B(x)\cdot B(x)=\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix} x^2-1 & x+1 \\ x-1 & x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-4)^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}\right)^2}{x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^2=1$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x(x-4)^2\cdot x}{(x-4)^2}=\lim\limits_{x\to4}x^2=$	**3p**
	$=16$	**2p**
c)	**c)** $\frac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\frac{1}{a}\left(a+\frac{16}{x+a}-\frac{16}{x}\right)=1-\frac{16}{x(x+a)}$, $x\in(0,+\infty)$, unde a este număr real, $a>0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{16}{x(x+a)}\right)=1$, deci nu depinde de a	**2p**
2.a)	Pentru orice număr real m, funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\frac{x^2}{x-2}=-1$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x+m)=m$ și $f(1)=m$, deci funcția f este continuă pe $\mathbb{R}\Leftrightarrow m=-1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x(x-2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x-2}=2$, deci dreapta de ecuație $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$ și f este continuă pe $(-\infty,1)$, mulţimea valorilor funcţiei f conține intervalul $(-\infty,0]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=m$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ și, cum f este continuă pe $(1,+\infty)$, mulţimea valorilor funcţiei conţine intervalul $(m,+\infty)$ și, cum $m\le0$, funcția f este surjectivă	**3p**