

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real x pentru care numerele 5 , $2x+3$, $2x+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p 2. Arătați că, pentru orice număr real m , graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + (m-1)x - m$ intersectează axa Ox .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x} = 2x-1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice relația $5^{n-1} > (n+1)!$.
- 5p 5. Determinați numerele reale a și b , știind că, în reperul cartezian xOy , punctul de intersecție a dreptelor $x + (2a+1)y - 4 = 0$ și $3x + by - 8 = 0$ este $M(a, -2)$.
- 5p 6. Arătați că $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$, pentru orice număr real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & \frac{1}{x} \\ 1 & y & \frac{1}{y} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale nenule.
- 5p a) Arătați că $D\left(2, \frac{1}{2}\right) = 0$.
- 5p b) Arătați că $D(x, y) = -\frac{1}{2xy}(2x-1)(2y-1)(x-y)$, pentru orice numere reale nenule x și y .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $D(\log_2 x, 2) = 0$.
2. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & 1 & 2 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $2A(1) - A(-1) = A(3)$.
- 5p b) Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a) + bI_3 = 2(A(1) - I_3)(A(1) - I_3)$.
- 5p c) Arătați că matricea $A(n)$ este inversabilă pentru orice număr natural n .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x+1}{x}$ și șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
- 5p a) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p b) Arătați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este crescător.
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)(a_n - \ln n)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x + a + 1, & x \leq 1 \\ x^2 + a^2x, & x > 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Determinați numerele reale a pentru care funcția f este continuă în $x=1$.

5p b) Pentru $a=2$, calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x)+x})$.

5p c) Pentru $a=-1$, arătați că ecuația $f(x) + 2^x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 0]$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\log_{2016} 63 + \log_{2016} 32 + \sqrt{0,0625} = \frac{5}{4}$.
- 5p** 2. Determinați numărul real m , pentru care soluțiile ecuației $x^2 - (3m-4)x + m-3 = 0$ verifică relația $x_1 + x_2 = 2x_1x_2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2 \cdot 2^x + 4^x - 8^x = 0$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $f(n) = 0$, unde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = n^3 + 3n - 4$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = AC = 6\sqrt{3}$ și $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\overline{AC} - \overline{AB}$.
- 5p** 6. Arătați că $\sin(a+b) = 1$, știind că $a, b \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $a \neq b$ și $\sin a + \cos a = \sin b + \cos b$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x & 3 & y \\ x^2 & 2 & y^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Calculați $\Delta(-1, 0)$.
- 5p** b) Demonstrați că $\Delta(x, y) = (x-y)(xy - 3x - 3y + 2)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numerele întregi distincte x și y , știind că $\frac{1}{y-x} \Delta(x, y) = 8$.
2. Se consideră matricea $A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 2^n & 3^n \\ 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde n este număr natural.
- 5p** a) Calculați $A(1) - A(0)$.
- 5p** b) Determinați inversa matricei $A(1)$.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă $A(n) \cdot A(n) = A(p)$, atunci $n = 0$ și $p = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{2x+1}{x}$ și șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n = f(n)$.
- 5p** a) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este descrescător.
- 5p** c) Demonstrați că $\ln 2 < x_n \leq \ln 3$, pentru orice număr natural n , $n \geq 1$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3}, & x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 4x - 4} + a, & x \geq 1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

5p b) Determinați numărul real a , pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 1$.

5p c) Pentru $a = 2$, calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\ln(f(x) - 2)}{x - 1}$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 4 - i$. Calculați $z \cdot \bar{z} - z - \bar{z}$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p 2. Determinați numărul real m , știind că axa Ox este tangentă graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + m^2 - m + 2$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 \log_x 5 + \log_5(5x) = 5$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie multiplu de 11.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul medianei AM . Demonstrați că $\overrightarrow{BN} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
- 5p 6. Arătați că, dacă $(\sin x + 3\cos y)^2 + (\cos x - 3\sin y)^2 = 10$ și $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x = y$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & y+1 & 2 \\ x^2+x & y^2+y & 2 \end{vmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\Delta(0, 2) = -2$.
- 5p b) Arătați că $\Delta(x, y) = (x-1)(y-1)(y-x)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Demonstrați că numărul $\Delta(m, n)$ este divizibil cu 2, pentru orice numere întregi m și n .
2. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a-1 & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Calculați $A(0) + A(2)$.
- 5p b) Arătați că $A(a)A(b) = A(2ab - a - b + 1)$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Arătați că $A\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{3}{2}\right)A\left(\frac{5}{2}\right) \cdots A\left(\frac{2017}{2}\right) = A\left(\frac{1}{2}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x^3(x+1)^3}$.
- 5p a) Arătați că $f(x) = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{2n^3}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - x + a, & x \leq 0 \\ \frac{e^{4x} - 1}{e^{3x} - 1}, & x > 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3}$.

5p b) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă în punctul $x = 0$.

5p c) Demonstrați că, dacă $a \in (-6, -3)$, atunci ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin două soluții reale distincte în intervalul $(-3, -1)$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , știind că $2\bar{z} + iz = 4 + 5i$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 - 2x$. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(f \circ f)(x) < x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+1} \cdot \sqrt[3]{27} = 3^3$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să conțină numai numere pare.
- 5p** 5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8$, $AD = 4$ și punctul M , mijlocul laturii CD . Calculați lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BM}$.
- 5p** 6. Se consideră $E(x) = \sin \frac{2x}{3} - \cos \frac{8x}{3}$, unde x este număr real. Arătați că numărul $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este natural.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} a^2 + a & a^2 - a & 1 \\ a^2 - a & a^2 + a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(-2)) = -32$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x) - xI_3) \geq 0$.
- 5p** c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_a(a^2 + a, a^2 - a)$, unde a este număr real. Demonstrați că pentru orice număr real nenul a , punctele P_a , P_{-a} și O **nu** sunt coliniare.
2. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Demonstrați că $M(x) \cdot M(-x) = M(0)$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Calculați inversa matricei $M(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Arătați că $\det(M(1) + M(2) + \dots + M(n)) = 2n^2(2^n - 1)$, pentru orice număr natural nenul n .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$.
- 5p** a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdot \dots \cdot f(n)$ este descrescător.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x + \sin(x-1) + m, & x \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3x-2} - 1}{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$, unde m este număr real.

5p a) Arătați că $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \frac{3}{4}$.

5p b) Determinați numărul real m pentru care funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

5p c) Pentru $m = -\frac{5}{4}$, demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(0, 2)$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

- 5p** 1. Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$ este egală cu 333. Al doilea termen al acestei progresii este egal cu:
A. 30 B. 111 C. 222 D. 333
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$. Numărul $(f \circ f)\left(\frac{10}{9}\right)$ este egal cu:
A. -10 B. $-\frac{5}{3}$ C. 0 D. $\frac{10}{9}$
- 5p** 3. Mulțimea soluțiilor ecuației $2 \log_2(x+1) - \log_2(x+2) = \log_{\frac{1}{3}} 3$ este:
A. $\left\{-\frac{3}{2}, 0\right\}$ B. $\left\{-\frac{3}{2}\right\}$ C. $\{0\}$ D. $\left\{0, \frac{3}{2}\right\}$
- 5p** 4. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cel puțin o cifră pară este egală cu:
A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{5}{9}$ D. $\frac{13}{18}$
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră triunghiul ale cărui laturi se află pe drepte de ecuații $d_1: y = -2x$, $d_2: y = 2x$ și $d_3: x = 2$. Perimetrul acestui triunghi este egal cu:
A. $4(2 + \sqrt{5})$ B. 24 C. $6\sqrt{5}$ D. $4(3 + \sqrt{5})$
- 5p** 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin x - \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x , expresia $E(x)$ este egală cu:
A. 0 B. $2 \cos x$ C. $2 \sin x$ D. 1

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(a,b) = \begin{vmatrix} a & 2b & 1 \\ a & a & b \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Calculați $D(0,1)$.
- 5p** b) Arătați că $D(a,1) \geq 0$, pentru orice număr real a .
- 5p** c) Demonstrați că, dacă numerele m și n sunt întregi impare, atunci $D(m,n) \neq 0$.
2. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & -x \\ 1 & 0 & 1 \\ -x & 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $A(-x) + A(x) = 2A(0)$, pentru orice număr real x .
- 5p** b) Arătați că $\det(A(x)A(y) - A(2xy)) = 0$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul real m , știind că $A(1)A\left(\frac{1}{2}\right) + A(2)A\left(\frac{1}{4}\right) + \dots + A(2019)A\left(\frac{1}{4038}\right) = mI_3$.

1. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

5p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5p b) Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_n = f(n)$. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit.

5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{f(n)} - 1)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} a + \frac{\sin x}{x}, & x \in (-\infty, 0) \\ \sqrt{x^2 + 2x}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$, unde a este număr real.

5p a) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă pe \mathbb{R} .

5p b) Pentru $a = 1$, determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .

5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real a , ecuația $f(x) = |a|$ are cel puțin o soluție.