Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $z=\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(x)+f(1-x)=7$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(-4,4)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul M și este perpendiculară pe dreapta OM.

5p **6.** Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sin B=\cos B$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Arătați că $1*2020=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Determinați $x\in A$ pentru care $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+2\sqrt{2}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Arătați că $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2}=3\cdot 3^x$.

5p **4.** Determinați numărul natural nenul n, știind că mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$, $N(7,0)$ și $A(a,3)$, unde a este număr real. Știind că $AM=AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.

5p **6.** Se consideră $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x-2=2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$.

5p **a)** Arătați că $0*0=1$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x\left(2x^2-1\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^1 x^{2n-1}f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z^2 - 4z + 5 = 0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $M(0,2)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt[3]{x^3 + 2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(2,3)$ și $C(4,a)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul C este situat pe mediatoarea segmentului AB.

5p **6.** Măsurile unghiurilor A, B și C ale triunghiului ABC sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice. Demonstrați că măsura unghiului B este egală cu $\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\ln x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x \in (0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 4(x+y) + a$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a = 10$, arătați că $1 * 2 = 0$.

5p **b)** Pentru $a = 20$, arătați că $e = 5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a \in [20,+\infty)$, atunci mulțimea $H = [4,+\infty)$ este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x) = 6^x - 3^x + 2^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(0) = \ln 4$.

5p **b)** Se consideră tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, \ln(16e))$ este situat pe această tangentă.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.