Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați partea reală a numărului complex $z=\frac{3+2i}{2-3i}$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-a$ are graficul tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+3\cdot 4^x-16=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, aceasta să aibă un singur element număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $N(4,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $(\sin x+\sin(\pi-x))^2+(\cos x+\cos(2\pi-x))^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x)+I_3)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere întregi x și y.

5p **b)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $d_1*d_2*\cdots*d_8$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_8$ sunt divizorii naturali ai lui 2015.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-f(x)-\ln 2}{x-1}$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)+x^2f(x)}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{8}$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinați $a\in(0,\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_2^4 \frac{1}{\ln x} f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}\,dx = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+ay+3z=2\\x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.
5p	**4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$.
5p	**5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.
5p	**6.** Determinaţi numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.
	2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.
5p	**b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.
5p	**c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.
5p	**b)** Determinați imaginea funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_2 x-\log_x 2=1$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
5p	**6.** Determinaţi $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+az=2\\2x+ay+4z=3\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=a(3-a)$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.
5p	**c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)-1}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a\circ b=1$.
5p	**c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, numărul $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\text{ de }n\text{ ori}}$ **nu** este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.

5p **a)** Calculați $\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Calculați $\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.