Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2\cdot 3 =$ $= 8$	**3p** **2p**
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$ $x = -2$ sau $x = 2$	**3p** **2p**
3.	$3^{2x}\left(3^2 - 1\right) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$ $x = 0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt $1, 2, 4$ şi 5, deci sunt 4 cazuri favorabile $p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{9}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)$ $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right)$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	**3p** **2p**
6.	$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x + \cos x\cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x\sin\dfrac{\pi}{4} =$ $= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12\cdot 3 - 0\cdot 1 =$ $= 36 - 0 = 36$	**3p** **2p**
b)	$A(a) - (12 + a)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1+a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(a) - (12+a)I_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1+a & -9 \end{vmatrix} = -a(1+a)$ $a(1+a) = 0$, de unde obţinem $a = 0$ sau $a = -1$	**3p** **2p**
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Din $b(a+d) = 0$ şi $c(a+d) = 1$, rezultă $a + d \neq 0$ şi $b = 0$ şi, cum $d^2 + bc = 3$, obţinem $d^2 = 3$, deci d este număr iraţional	**2p** **3p**
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 =$ $= 1 + 1 - 2 = 0$	**3p** **2p**
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x $\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	**2p** **3p**

c)	$x+\sqrt[3]{x^6}-2=4$, deci $x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=$	**3p**
	$=2x-\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=$	**3p**
	$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2=2\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^4=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=0\Leftrightarrow x^2=2$ şi, cum $x>1$, obţinem $x=\sqrt{2}$	**2p**
	$A\left(\sqrt{2},0\right)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox și, cum panta tangentei la graficul funcției f în punctul A este $f'\left(\sqrt{2}\right)=0$, obținem că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)\frac{x}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{x^2}{2}\right\|_0^1=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\int_0^2\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}dx=$	**2p**
	$=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)\right\|_0^2=\frac{1}{2}\ln 5$	**3p**
c)	$\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\int_1^e\left(x+\frac{2}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+2\int_1^e\frac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx+2\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right\|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx+2\cdot\left.\frac{1}{2}\ln^2 x\right\|_1^e=\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right\|_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{e^2+5}{4}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=\log_2\frac{7\cdot 6}{21}=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**
2.	$f(x)-g(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x^2+12=4x^2\Rightarrow 3x^2=12\Leftrightarrow x^2=4$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	$x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=2$, care sunt elemente ale mulțimii A, deci avem 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u}=3\vec{v}\Leftrightarrow a\vec{i}+6\vec{j}=6\vec{i}+3b\vec{j}$	**3p**
	$a=6$, $b=2$	**2p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$	**3p**
	$=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2}-2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x+2 & x+3\\ x-3 & x-2\end{vmatrix}=x^2-4-\left(x^2-9\right)=$	**3p**
	$=x^2-4-x^2+9=5$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(-3)+A(3)=A(-2)+A(2)=A(-1)+A(1)=2A(0)$	**3p**
	$2A(0)+2A(0)+2A(0)=nA(0)$, de unde obținem $n=6$	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}x & 3x+5\\ x-5 & 3x-10\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}x & 3x+5\\ x-5 & 3x-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ -4 & -7\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
2.a)	$0*1=\frac{0+1+1}{0^2+1^2+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**

b)	$x * x = \frac{2x+1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{2x+1}{2x^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = 1$	**3p**
c)	$x * (-x) = \frac{x + (-x) + 1}{x^2 + (-x)^2 + 1} = \frac{1}{2x^2+1}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x * (-x) \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2+1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{-2x^2}{2x^2+1} \le 0$ inegalitate adevărată pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \sqrt{x^2+2x+2} + x \cdot \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} =$	**3p**
	$= \frac{x^2+2x+2+x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2+2x+2}} \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^3+2x^2+2x} =$	**3p**
	$= 0$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt{x^2+2x+2} = -\infty$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x^2+2x+2} = +\infty$ și, cum f este funcție continuă, obținem că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x) = a$ are cel puțin o soluție	**3p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - xe^x \right) dx = \int_0^1 \left(xe^x + x - xe^x \right) dx = \int_0^1 x\,dx =$	**2p**
	$= \frac{x^2}{2} \Big\vert_0^1 = \frac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f\left(x^2\right) dx = \int_1^2 \frac{x^2 e^{x^2} + x^2}{x} dx = \int_1^2 xe^{x^2} dx + \int_1^2 x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big\vert_1^2 + \frac{x^2}{2} \Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2}e + \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^4 - e + 3}{2}$	**2p**
c)	$\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 x' F(x) dx = xF(x) \Big\vert_0^1 - \int_0^1 x f(x) dx = F(1) - \int_0^1 \left(x^2 e^x + x^2 \right) dx =$	**3p**
	$= -\left(\left(x^2 - 2x + 2 \right) e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big\vert_0^1 = -\left(e + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{5-3e}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_3 - a_2 = 2$	**3p**
	$a_1 = a_2 - r = 1$	**2p**
2.	$f(n) = n^2 - 1$, deci $n^2 - 1 = 3 \Rightarrow n^2 - 4 = 0$	**3p**
	Cum n este număr natural, obținem $n = 2$	**2p**
3.	$x^2 - 9 = (x-1)^2 \Rightarrow 2x = 10$	**3p**
	$x = 5$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$ este egal cu $C_4^3 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} =$	**3p**
	$= 4$	**2p**
5.	$m_{MN} = 1$, $m_{PQ} = \frac{3-a}{3}$	**2p**
	$MN \parallel PQ$, de unde obținem $m_{MN} = m_{PQ} \Leftrightarrow 3 - a = 3 \Leftrightarrow a = 0$	**3p**
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{BC}$	**3p**
	$BC = 10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\det(A \cdot A) = \begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{vmatrix} = a^2 b^2$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
b)	$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu $x, y, z, t \in \mathbb{R} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & bt \end{pmatrix}$ și $X \cdot A = \begin{pmatrix} ax & by \\ az & bt \end{pmatrix}$	**3p**
	$ay = by$ și $az = bz$, deci $y(a-b) = 0$ și $z(a-b) = 0$ și, cum $a \neq b$, obținem $y = z = 0$, deci există numerele reale x și t astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$	**2p**
c)	$Y \cdot Y = A$, deci $A \cdot Y = (Y \cdot Y) \cdot Y = Y \cdot (Y \cdot Y) = Y \cdot A$, deci $Y = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$	**2p**
	$Y \cdot Y = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, de unde obținem $\alpha^2 = 4$ și $\beta^2 = 0$, deci $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sau $Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, care convin	**3p**

2.a)	$3*3=3\sqrt{3+1}+3\sqrt{3+1}=$ $=3\cdot 2+3\cdot 2=6+6=12$	**3p** **2p**
b)	$x*0=x\cdot\sqrt{0+1}+0\cdot\sqrt{x+1}=x$, pentru orice $x\in M$ $0*x=0\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\sqrt{0+1}=x$, pentru orice $x\in M \Rightarrow x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$	**2p** **3p**
c)	$\left(x^2+2x\right)\sqrt{3+1}+3\sqrt{x^2+2x+1}=7 \Leftrightarrow 2\left(x^2+2x\right)+3\sqrt{(x+1)^2}=7 \Leftrightarrow 2x^2+7x-4=0$ $x=-4$, care nu convine, $x=\frac{1}{2}$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\ln(x+1)+x\left(\ln(x+1)\right)'=$ $=1\cdot\ln(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f''(x)=\frac{x+2}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$ $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p** **2p**
c)	$\ln(x+1)\le 0$ și $\frac{x}{x+1}\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci $f'(x)\le 0$, de unde obținem că f este descrescătoare pe $(-1,0]$ Pentru orice $x_1,x_2\in(-1,0]$ cu $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$, deci $x_1\ln(x_1+1)\ge x_2\ln(x_2+1)$ de unde obținem $\ln(x_1+1)^{x_1}\ge\ln(x_2+1)^{x_2}$, deci $(x_1+1)^{x_1}\ge(x_2+1)^{x_2}$, adică $g(x_1)\ge g(x_2)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-x^3\right)dx=\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\Big\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\int_0^1 x^2\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{3}\int_0^1\left(1-x^3\right)'\left(1-x^3\right)^3dx=-\frac{1}{12}\left(1-x^3\right)^4\Big\|_0^1=$ $=0-\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^ndx=\int_0^1\left(1-x^3\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(1-x^3\right)^ndx=-\int_0^1 x^3\left(1-x^3\right)^ndx$, pentru orice număr natural nenul n $x^3\ge 0$ și $1-x^3\ge 0$, pentru orice $x\in[0,1]$, deci $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(f(x)\right)^ndx\le 0$, de unde obținem $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^ndx$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**