Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că primul termen este $b_1 = 2$ și rația este $q = 3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x}=3-x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{50}\right\}$, acesta să **nu** fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2-4\cos x(\sin x-\cos x)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $N=\sqrt{33}*\sqrt{31}$ este un număr natural.

5p **b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $(x*x*x)^2=300$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(5-x)(x+1)}{\left(x^2+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2 = 2$.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-4$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-5x+7}=x-1$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.
5p	**5.** Determinați numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+5\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det A=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(6)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-x-y+2$.
5p	**a)** Arătați că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x\leq 5$.
5p	**c)** Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx=18$.
5p	**b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că $\displaystyle\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $b_1 = 1$ şi $b_2 = 2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$. Determinaţi numerele naturale x, pentru care $f(x)<7$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8}=x+2$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(1,a)$ și $D(2,1)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.
5p	**6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=10$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & x\\ 2x & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(A(1))=4$.
5p	**b)** Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+y-4)-xy$.
5p	**a)** Arătaţi că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.
5p	**c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*2019*(-2020)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $0\leq\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.
5p	**b)** Calculați $\int_1^2 \frac{1}{x^2}f(x)\,dx$.
5p	**c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 3$ și $b_6 = 6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 20$. Determinaţi numerele reale a, ştiind că $f(a) = a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x = \frac{1}{5^{3x}}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(1,0)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1)) = 0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y) = M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x = y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2) = M(n^2)M(m^2+1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = x + y + 7xy$.

5p **a)** Arătaţi că $x \circ y = 7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x = 5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a,b \in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care numărul $a \circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e f'(x)\,dx = 1$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real p, $p > 1$, ştiind că $\int_1^p x f(x)\,dx = \frac{p^2}{2}\ln p - \frac{3}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{6-x}=\sqrt{x+14}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6**. Arătați că $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+y+az=4 \\ -3x-y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Pentru $a=-1$, determinați soluția sistemului de ecuații.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional p, matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr rațional p.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=xy-101x-101y+10302$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi x și y, cu $x<y$, pentru care $x*y=202$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$.

5p **a)** Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{a}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 5$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2 - ax + a - 1 = 0$ are soluții reale distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3 - \sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 1$.

5p **4.** Calculați $2C_4^3 - 3A_4^2$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} + a\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + \left(a^2 + 1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB = 8$, $BC = 8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x, y) = xI_2 + yA$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A = -1$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x, y) \cdot M(a, b) = M(xa + yb, xb + ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Determinați perechile (x, y) de numere reale, știind că $\det\left(M(x, y)\right) = 4$ și suma elementelor matricei $M(x, y) \cdot M(x, y)$ este egală cu 8.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x * y = x + y - 1$ și $x \circ y = xy - x - y + 2$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ (1 * 3) = (2 \circ 1) * (2 \circ 3)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x \circ x} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x * x}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x - 1) * (2y + 1) = 2$ și $(x + y) \circ 4 = 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 5x - 3, & x \in (-\infty, 1) \\ x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a > 1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + x + 1$ și $g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)\,dx=20$.

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-11x+6$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x,f(x))$ sunt situate sub axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x)-\lg(7-x)=-1$.
5p	**4.** Determinați numărul natural n, $n\ge2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=6$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1,a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y=x+4$.
5p	**6.** Determinați $\cos2x$, știind că x este număr real și $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\a&1&1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\x-2y+z=2\\ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.
5p	**b)** Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.
5p	**c)** Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}$.
	2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+e^x+m$, unde m este număr real, și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+e^x+4x+1$.
5p	**a)** Determinați numărul real m astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $m = 4$, calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Pentru $m = 0$, calculați $\int_1^2 x\,f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx-m=0$ **nu** are soluții reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-20}=\dfrac{1}{81}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n!\le n(n-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6**. Determinați numărul real a, $a>1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(e)\right)=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a,\, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care graficul funcției f este tangent axei Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$.
5p	**4.** Demonstrați că numerele C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.
5p	**b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
5p	**c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.
5p	**a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$.
5p	**b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.
5p	**c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\,f(x))=2$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.
5p	**b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^{3x} f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care numerele $a-1$, 3 și $a+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}-3^x-8=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2\le 3C_n^1$.

5p **5.** Determinați numerele reale m, $m\ne 2$, pentru care vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+11xy$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=\frac{8}{11}$.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $a=\left(1-\frac{1}{11}\right)\circ\left(1-\frac{2}{11}\right)\circ\left(1-\frac{3}{11}\right)\circ\left(1-\frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$.

5p **a)** Determinați primitiva $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x^3+1)f_3(x)$, știind că $G(0)=2020$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx \le \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=-\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, astfel încât $f(x)+f(-x)=2020$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{1-x}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6**. Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x \, dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați termenul a_2 al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1+2a_2+a_3=4$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+6$. Arătați că numărul $f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x)=3-\log_5(24-x)$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a & 10\\ -2 & -4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x-2y+1$.
5p	**a)** Arătați că $5*8=0$.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x*2020^x=2$.
5p	**c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.
	2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.
5p	**c)** Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că modulul numărului complex $z=\frac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.
5p	**2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ este pară.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.
5p	**5.** În triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y=3x+1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y=x+7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
5p	**6**. Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right)=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a, b\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}xy+x+y$.
5p	**a)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. Arătați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ și x_n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\int_4^a\dfrac{f(x)}{x}dx=10+\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+2^x=\frac{3}{4}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6**. Triunghiul ABC are $AB=10$ și $AC=5$. Arătați că $\sin C=2\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-3&0\\2&4&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\-2x-3y=1\\2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

5p **c)** Pentru $a\neq-2$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=23$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2(x+1)f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, astfel încât $\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2 = -1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$. Determinați numărul real a, astfel încât $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\cdot 2^{x+1}\cdot 3^x = 12\cdot 5^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1)\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1,3)$ și $C(-2,4)$. Determinați panta dreptei BD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ x\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a\neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x\circ a=x\circ b$.

5p **c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x\circ(x+1)=-x^3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n(x-f(x))dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2+x$. Arătați că $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul G, centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A=1-BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-7$.

5p **a)** Arătați că $5\circ 2=0$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+\log_7 x$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Arătați că $e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p **c)** Determinați $a \in (1,+\infty)$ astfel încât $\int_0^x f(e^t) dt = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 1 - 3\sqrt{3}$ și rația $r = \sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3} - 1$.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1) = 2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(a)\right) = 0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(A(2) + xI_2\right) = 0$.

5p **c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b) = A(b)\cdot A(a)$, atunci $a = b$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt[3]{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $0 * 8 = 4$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x \geq \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx = \frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x) = e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că diferența numerelor $5+2\sqrt{3}$ și $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ este număr întreg.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2+2x$. Determinați numerele reale m, pentru care $f(m)=g(m)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5x+1}=\sqrt{2x+5}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,2,3\}$, acesta să verifice inegalitatea $\lvert a+1\rvert\geq 2$.
5p	**5.** Se consideră A, B, C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC. Arătați că $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.
5p	**6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A\cdot\sin B=AC\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.
5p	**c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\left(-1,\sqrt{2}\right)\cdot X=A(0,0)$.
	2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+x+y$.
5p	**a)** Arătați că $1\circ 4=25$.
5p	**b)** Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Se consideră dreapta d, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f. Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cos x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p	**b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.
5p	**c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}\,dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele raționale a și b, știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=a+b\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-4^{\frac{2x+3}{2}}=-7$.

5p **4.** Determinați numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1,3)$, $B(3,5)$ și $C(-4,-2)$. Determinați ecuația dreptei AD.

5p **6**. Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $\operatorname{tg}2x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=2\\y+3z=4\\2x-y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=18$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, astfel încât $a*x=a$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(2^x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}\,dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z=(a+2i)^2+(a-2i)^2$ este real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{\frac{x+1}{2}}=2\cdot 2^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax+y-5=0$, unde a este număr real și $x-4y+3=0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+z=1\\y+z=2\\x+y=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1\circ z_2=iz_1z_2+z_1+z_2$.

5p **a)** Arătați că $i\circ i=i$.

5p **b)** Demonstrați că $z_1\circ z_2=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Demonstrați că simetricul numărului $\dfrac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{n(x^n-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)\,dx - 14\int_0^1 f^6(x)\,dx = 128$.