Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați a_{2015}, știind că $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică cu $a_1 = 2015$ și $r = -1$.

5p **2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(2,-3)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu 2 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, ..., 9\}$, aceasta să fie formată doar din pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,-2)$ și $C(1,2)$. Determinaţi coordonatele punctului B, știind că patrulaterul $OABC$ este paralelogram.

5p **6.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 3\sqrt{3}$ și $BD = 6$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 2 & x-1 & 7-x \\ 1 & -2 & x^2 \end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $D(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $D(x) = -(x-1)(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $D\left(2^x - 3\right) = 0$.

2. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+3a & -6a \\ a & 1-2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $X(-1) + X(1) = 2X(0)$.

5p **b)** Arătați că $X(a)\cdot X(b) = X(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care matricea $X(a)$ este inversabilă.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că dreapta de ecuație $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)-4}{x-2}$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} - 3, & x \leq -1 \\ 2x^3 + (a-3)x - 4, & x > -1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinaţi numărul real a pentru care funcţia f este continuă în $x = -1$.

5p **b)** Arătaţi că $f(x) + 2 \leq 0$, pentru orice $x \leq -1$.

5p **c)** Pentru $a = -1$, arătaţi că ecuația $f(x) = 0$ are cel puţin o soluţie în intervalul $[0,2]$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea reală a numărului complex $z = i(1+i)^2$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale m, ştiind că imaginea funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$ este intervalul $[-1,+\infty)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x} + 2^{x+1} = 4 - 2^x$.

5p **4.** Determinaţi numărul elementelor mulţimii $M = \{1, 2, 3, \ldots, 2016\}$ care sunt divizibile cu 5 şi nu sunt divizibile cu 10.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC şi punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{BM}$. Arătaţi că $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi numerele reale $x \in [0,\pi]$, pentru care $\sin 2x = \sin x$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2015 & 2016 & x \\ 2015^2 & 2016^2 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2016))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)) = (2015 - x)(2016 - x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\det(A(x))$ are valoarea minimă.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculați $A \cdot A$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a) \cdot X(b) = X(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați inversa matricei $M = X(-3) \cdot X(-2) \cdot X(-1) \cdot X(0) \cdot X(1) \cdot X(2) \cdot X(3) \cdot X(4)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx^2 + 4x - m}{x-1}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că dreapta de ecuaţie $x = 1$ este asimptotă verticală la graficul funcţiei f, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, pentru care dreapta de ecuaţie $y = 3$ este asimptotă orizontală la graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.

5p **c)** Pentru $m = -1$, calculaţi $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - 5}{x - 2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2a, & x < 2 \\ ax + \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a = 0$, calculaţi $f(-1) \cdot f(4)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a \in \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$, ecuația $f(x) = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(-1,4)$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că numerele $x+2$, 7 și $2x$ sunt în progresie aritmetică.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-2(m-1)x+2m^2-2m=0$. Determinați numărul real m, $m\neq 0$, $m\neq 1$ pentru care $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{2x}=125\cdot 5^{-x}$.

5p **4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $M=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, aceasta să conțină elementul 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,3)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că $2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,x+1=0$, știind că $\sin x=\frac{1}{3}$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\frac{x+1}{2} & \frac{x-1}{2}\\ \frac{x-1}{2} & \frac{x+1}{2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(3))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))\cdot\det(A(y))=\det(A(xy))$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că $\det(A(1)+A(2)+\ldots+A(n))=n\left(\det(A(1))+\det(A(2))+\ldots+\det(A(n))\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $A-B$.

5p **b)** Arătați că $(A+I_2)\cdot(B-I_2)=6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A=A\cdot X$ și $X\cdot B=B\cdot X$, atunci $X\cdot Y=Y\cdot X$, pentru orice $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+6}{x+1}$, unde a este număr real.

5p **a)** Pentru $a=7$, calculaţi $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, pentru care dreapta de ecuaţie $y=x+2$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a, funcția f **nu** admite asimptotă orizontală spre $+\infty$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2mx}{2-x}, & x\in(-\infty,-2)\\ 2x+4-m, & x\in[-2,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=1$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(x)=0$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m pentru care $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $N=\log_5 7+\log_5 35-2\log_5 \frac{7}{25}$ este natural.

5p **2.** Știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$, calculați $S=(f\circ f)(1)+(f\circ f)(2)+\ldots+(f\circ f)(10)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+1\right)+3=\log_2\left(7x^2+9\right)$.

5p **4.** Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{i, i^2, i^3, i^4\right\}$, unde $i^2=-1$, acesta să fie număr real.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,n)$, $N(n,3)$ și $P(2n,5)$, unde n este număr natural. Știind că vectorii $\overrightarrow{MN}$ și $\overrightarrow{MP}$ sunt coliniari, determinați numărul natural n.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $X(a)=\begin{pmatrix}2&4&1\\3&9&1\\a&a^2&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(X(-1)\right)=12$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(X(a)-I_3\right)=0$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(3,9)$ și $C\left(a,a^2\right)$, unde a este număr natural. Determinați numerele naturale a pentru care ABC este triunghi și are aria mai mică decât 3.

2. Se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix}1+3x&3x\\-3x&1-3x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați inversa matricei $M(x)$, unde x este număr real.

5p **c)** Determinați numărul real pozitiv x pentru care are loc egalitatea $M\left(\sqrt{x}\right)M\left(\sqrt{x+5}\right)=M(5)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că există un singur număr natural nenul m pentru care $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(mx)}{f(x)}=m^2-m$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2-ax+2a-4, & x\in(-\infty,2)\\ 2^{x-1}-2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4f(x)}{(1-2x)^2}=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a<3$, ecuația $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1,3)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XI-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_3=11$ și $a_4=13$. Primul termen al acestei progresii este egal cu:

A. -1 **B.** 3 **C.** 7 **D.** 11

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-8x+m$, unde m este număr real. Dacă vârful parabolei asociate funcției f are coordonatele egale, atunci numărul real m este egal cu:

A. 6 **B.** 8 **C.** 10 **D.** 12

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $\sqrt{x+12}=x$ este:

A. $\{-3,4\}$ **B.** $\{4\}$ **C.** $\{-3\}$ **D.** $\{-4,3\}$

5p **4.** Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*\,\middle|\,n\leq 120\right\}$, acesta să fie multiplu de 25 este egală cu:

A. $\frac{1}{30}$ **B.** $\frac{4}{121}$ **C.** $\frac{1}{24}$ **D.** $\frac{29}{30}$

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,5)$ și $N(4,4)$. Punctul P, situat pe axa Ox, pentru care punctele M, N și P sunt coliniare este:

A. $P(-8,0)$ **B.** $P(0,8)$ **C.** $P(0,0)$ **D.** $P(8,0)$

5p **6.** Se consideră expresia $E(x)=\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$, unde x este număr real. Pentru orice număr real x, expresia $E(x)$ este egală cu:

A. 0 **B.** $\sqrt{3}\cos x$ **C.** $\sin x$ **D.** 1

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră determinantul $D(x)=\begin{vmatrix}1-x & 2 & 3\\ 1 & 2-x & 3\\ 1 & 2 & 3-x\end{vmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $D(1)=5$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr întreg p, $p\neq 6$, numărul $D(p)$ este divizibil cu $6-p$.

5p **c)** Determinați valoarea maximă pe care o poate lua $D(n)$, atunci când n este număr natural.

2. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}0 & x+1\\ x-1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $B(1)+B(3)=2B(2)$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $B(x)\cdot B(x)=B(x)$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{(x-4)^2}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-8x^2+16x}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{a}\left(f(x+a)-f(x)\right)$ **nu** depinde de a.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x-2}, & x\in(-\infty,1)\\ \ln x+m, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, pentru care funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Pentru $m\le 0$, demonstrați că funcția f este surjectivă.