Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $M(m,4)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{1}{2}$, arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstraţi că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x şi y.
5p	**c)** Determinaţi numărul real x, ştiind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.
5p	**c)** Demonstraţi că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(\pi)>13$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)dx=\frac{5}{2}$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m, pentru care funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi numărul real nenul a, ştiind că $\int_0^a f(x)dx=3a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_1=4$ și rația $q=2$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(2x+1)=\log_3 5$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx-2$.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2))=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x)=2A(1)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.
5p	**c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(e)<\frac{7}{2}$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=e(e-1)$.
5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.
5p	**c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.
5p	**2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, acesta să fie pătrat perfect.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d, care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=3x-2016$.
5p	**6.** Determinaţi aria triunghiului ABC, ştiind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.
5p	**a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.
5p	**c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2(x^2+3x+3)f(x)\,dx=6$.
5p	**b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3 = 5$ și $b_4 = 10$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x) = x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12} = x+2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,0)$. Determinaţi ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB = 6$ şi $C = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y) = A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x \neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x \leq x-1$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 (x^2+1) f(x)\,dx = 1$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = 1 - \frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că $\int_n^{n+1} 2x f(x)\,dx = \ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 4x + 1 = 0$. Arătați că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x+1} = \frac{1}{8}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4\sqrt{3}$, $AC = 4$ și $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1)) = -1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y) = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2}) = A(27)$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 0$.
5p	**b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X + 2$, atunci restul împărțirii lui f la $X + 3$ este egal cu -1.
5p	**c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2017}{e^x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{-(x + 2016)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015, +\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{4}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, ştiind că $F(1) = \frac{\pi}{4} + 1$.
5p	**c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n x f(x) dx = \frac{1}{2}\ln 5$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3+2i$ și $z_2 = 3-2i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(2, m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x-5} = 3^{-2}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(1,3)$ și $C(m,1)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul C aparține dreptei AB.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos\frac{x}{2}+\sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1) - f(-1) = 4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-2x)\,dx = e-1$.

5p **b)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a x f(x)\,dx = 1+\frac{2a^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_3=10$ și rația $r=3$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, știind că punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(2,4)$. Determinaţi ecuația mediatoarei segmentului AB.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele $AB=8$ și $AC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x+5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(-2))=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.
5p	**a)** Arătaţi că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ(-6)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{2}{x}+\ln x\ge 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2 2x\,f(x)\,dx=\frac{13}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f, pentru care $F(1)=1$.
5p	**c)** Demonstrați că $2\int_1^n\left(f(x)+x\,f'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge2$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați produsul primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=4$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)^2$ și $g(x)=2018-x$. Calculați $g(f(1))$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $25^x=5^{x^2}$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor egală cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $(a-1)x-a^2y-a^2=0$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a, știind că dreapta d este paralelă cu axa Ox.
5p	**6.** Arătaţi că $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{5}{2}$, știind că $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=-7$.
5p	**b)** Demonstrați că $xA(y)-yA(x)=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, știind că $(aA(-1)+A(a))A(0)=(a^2+7)I_2$.
	2. Se consideră polinomul $f=4X^3-6X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real m, polinomul f **nu** se divide cu polinomul X^2+X+1.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)^2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_3}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+\frac{1}{x+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=22$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-3x^2$ este egal cu $\frac{\pi}{n}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 7$ și $a_3 = 15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinaţi numerele naturale n, pentru care $f(n)<8$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-1}=x+1$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+2$ și $d_2: y=(m-3)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

5p **6**. Arătaţi că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd, ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=0$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(x^2-5x+7\right)=\log_2 3$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie divizibil cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$, $C(4,3)$ și $D(8,5)$. Demonstrați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
5p	**6.** Arătați că $\sin x+3\cos x=2\sqrt{2}$, știind că $\operatorname{tg}x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix} a & 5\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(X(1)\right)=-4$.
5p	**b)** Demonstrați că $X(-a)+X(a)=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinaţi perechile de numere reale (a,b) pentru care $X(a)X(b)=X(a)+X(b)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-X+m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Pentru $m=2$, arătați că $f(2)=0$.
5p	**b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+1$, atunci polinomul f se divide cu X^2-3X+2.
5p	**c)** Determinați numărul real nenul m, știind că $\frac{x_1}{x_2x_3}+\frac{x_2}{x_3x_1}+\frac{x_3}{x_1x_2}=6$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x+2}+\frac{x+2}{x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinați imaginea funcției f.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-\ln x\right)dx=11$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3e^2+4e-4}{2}$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a$ are aria egală cu a^3+a^2+a-2.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+a$ se intersectează într-un punct de abscisă $x=1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele d_1, de ecuație $y=ax+2$ și d_2, de ecuație $y=\frac{x}{4}+1$. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

5p **6.** Arătați că $\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}-3&-2\\3&2\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)-M(2018)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați perechea de numere naturale nenule (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=8xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=1$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x+1$. Demonstrați că $f(x\circ y\circ z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(1-x)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\sqrt{2}\right)>f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \frac{x f(x)}{e^x}dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu 1.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și rația $q = 5$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 4x - 5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x} + x = 4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1)) = 17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y) = 2A(-8)$.

2. Pe mulţimea $G = (-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x * y = \dfrac{4x + 4y}{4 + xy}$.

5p **a)** Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **b)** Determinaţi $x \in G$, pentru care $x * x = \dfrac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \dfrac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy) = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 1 - 2x + 2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{-2x}{x+1}$, $x \in (-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$, pentru orice $x \in (0,\pi)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx = 6$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = n$ are aria egală cu $4 - 6e^{-n}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, dacă $a_1 = 2$ și rația $r = 2$.
5p	**2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$ cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x+1} - 3\cdot 5^x = 2$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2 - 4x + 4 = 0$.
5p	**5.** Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, știind că triunghiul ABC este echilateral și $AB = 2$.
5p	**6.** Arătați că $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați perechile de numere naturale m și n pentru care $A(m)A(n) = A(2)$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.
5p	**a)** Arătați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 9$.
5p	**c)** Calculați $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \ldots \circ 2019^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x^e$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.
5p	**c)** Demonstraţi că ecuația $e^x = x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x}dx = 6$.
5p	**b)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 1$ şi $x = 2$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a > 2$, știind că $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)}dx = 3\ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(1+i)^2-2i=0$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numărul real nenul m, știind că abscisa vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+8x-7$ este egală cu 12.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2-10x+40\right)=2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(-2,0)$ și $C(0,3)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Arătați că $\sin 3x+\sin 2x+\sin x=\sqrt{3}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=5$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)M(b)=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $M(a)M(a)=M(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5x+5y-xy-20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*(-2018)*2019$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x+9}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{x^3}f(x)$, axa Ox, dreptele de ecuații $x=1$ și $x=a^2$ are aria egală cu $\ln 5$.