Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\left(\sqrt{5}+2\right)^2=9+4\sqrt{5}$	**3p**
	$9+4\sqrt{5}-4\sqrt{5}=9$	**2p**
2.	$f(m)=4\Rightarrow m+2=4$	**3p**
	$m=2$	**2p**
3.	$x^2+9=25\Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care verifică ecuația	**3p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 4 numere divizibile cu 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$\dfrac{a-1}{2}=\dfrac{-3}{-6}$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot1-0\cdot0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+3x&2x\\-6x&1-4x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+3y&2y\\-6y&1-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x+3y-3xy&2x+2y-2xy\\-6x-6y+6xy&1-4x-4y+4xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+3(x+y-xy)&2(x+y-xy)\\-6(x+y-xy)&1-4(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(2^x+2^x-2^x\cdot2^x\right)=A(1)\Leftrightarrow 2^x+2^x-2^x\cdot2^x=1$	**3p**
	$\left(2^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-(-1)^2+a\cdot(-1)+2=-a$	**2p**
	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot1+2=a+2\Rightarrow f(-1)+f(1)=-a+a+2=2$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	Restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2-2X+2 este aX	**3p**
	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X^2-2X+2\Leftrightarrow a=0$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=a \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2a$	**3p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-a\left(x_1+x_2+x_3\right)-6=1-2a-a-6=-3a-5$	**1p**
	$x_1^3+x_2^3+x_3^3+3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3\right)=-3a-5+3a=-5$, pentru orice număr real a	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x-3)-\left(x^2+2x-11\right)}{(x-3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11}{x(x-3)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-11-x^2+3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-11}{x-3}=5$, deci dreapta de ecuație $y=x+5$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(3,5)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(3,5)$	**3p**
	Cum $3<\pi<4$ și $f(4)=13$, obținem $f(\pi)>13$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\dfrac{1}{e^x}f(x)dx=\int_0^1(3x+1)dx=$	**2p**
	$=\left.\left(\dfrac{3x^2}{2}+x\right)\right\|_0^1=\dfrac{3}{2}+1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=(3x+m)'e^x+(3x+m)\left(e^x\right)'=3e^x+(3x+m)e^x=(3x+m+3)e^x$	**3p**
	$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow(3x+m+3)e^x=(3x+1)e^x$, pentru orice număr real x, deci $m=-2$	**2p**
c)	$\int_0^a(3x+1)e^xdx=\left.(3x-2)e^x\right\|_0^a=(3a-2)e^a+2$	**2p**
	$(3a-2)e^a+2=3a\Leftrightarrow(3a-2)\left(e^a-1\right)=0$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a=\dfrac{2}{3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 4 \cdot 2 =$ $= 8$	**3p** **2p**
2.	$x_V = 1$ $y_V = -1$	**2p** **3p**
3.	$2x + 1 = 5 \Rightarrow 2x = 4$ $x = 2$, care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	$C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} =$ $= 10$	**3p** **2p**
5.	$0 = m \cdot 1 - 2$ $m = 2$	**3p** **2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= 1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 - 1 = -1$	**2p** **3p**
b)	$A(a) + A(-a) = \begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2A(0)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
c)	$A(x)A(x) = \begin{pmatrix} x^2 - 4x + 5 & 4 - 2x \\ 4 - 2x & x^2 - 4x + 5 \end{pmatrix}$, $2A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ 4 - 2x = 2 \end{cases}$, de unde obținem $x = 1$	**3p** **2p**
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) + 4 = -m - 1$ $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + m \cdot 1 + 4 = m + 1 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 1 + m + 1 = 0$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**
b)	$m = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 0$ $X - 1$ divide f și $X + 1$ divide f, deci polinomul f se divide cu polinomul $X^2 - 1$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=16-2m$	**3p**
	Cum $x_1x_2x_3=-4$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2-\dfrac{4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{x_1x_2x_3}=16-2m-\dfrac{4m}{-4}=16-m$, obținem $m=16$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=3$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(2,+\infty)$	**2p**
	Cum $2<e<3$ şi $f(3)=\dfrac{7}{2}$, obținem $f(e)<\dfrac{7}{2}$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 x^2 f(x)dx=\int_1^2 e^x\,dx=e^x\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci funcția F este convexă pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 \|f(x)\|dx=\int_1^2 \dfrac{e^x}{x^2}dx$	**2p**
	Cum $x\geq 1\Rightarrow x^2\geq 1\Rightarrow \dfrac{1}{x^2}\leq 1$, obţinem $\dfrac{e^x}{x^2}\leq e^x$, deci $\mathcal{A}\leq\int_1^2 e^x\,dx$, adică $\mathcal{A}\leq e(e-1)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2=(1-i)^2=1-2i+i^2=$	**2p**
	$=1-2i-1=-2i$	**3p**
2.	$f(0)=2016$	**2p**
	$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2016)=0$	**3p**
3.	$x^2-3x=x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	Panta unei drepte paralele cu dreapta d este egală cu 3	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta d este $y=3x+1$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2-(-2)=4$	**3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$	**2p**
	$=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x*y)*z=(-3(x-3)(y-3)+3)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(-3(y-3)(z-3)+3)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z, deci legea de compoziție „$*$” este asociativă	**3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12 \Leftrightarrow (x-3)^3=1 \Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=$	**3p**
	$=\frac{3x^3-3}{x}=\frac{3(x^3-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x^3-3\ln x\right)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=\int_1^2(2x+3)\,dx=\left(x^2+3x\right)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^3\|f(x)\|dx=\int_0^3\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\ln\left(x^2+3x+3\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big\|_{-1}^0=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=\frac{b_4}{b_3}=\frac{10}{5}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
2.	$x\le 5\Rightarrow x-3\le 2$	**2p**
	$f(x)\le 2$, deci valoarea maximă a funcției este 2	**3p**
3.	$x^2+12=(x+2)^2\Rightarrow 4x-8=0$	**3p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$C_7^2=\frac{7!}{2!\cdot 5!}=$	**3p**
	$=21$	**2p**
5.	$\frac{y-0}{4-0}=\frac{x-1}{3-1}$	**3p**
	$y=2x-2$	**2p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{6}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x&-x\\2x&1-2x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+y&-y\\2y&1-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x+y-xy&-y-x+xy\\2x+2y-2xy&1-2y-2x+2xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y-xy)&-(x+y-xy)\\2(x+y-xy)&1-2(x+y-xy)\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)A(x)=I_2$ și, cum $I_2=A(0)$, obținem $A\left(x+x-x^2\right)=A(0)$	**3p**
	$2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
2.a)	$x\circ y=2xy-6x-6y+18+3=$	**2p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$1\circ 2\circ 3\circ 4=((1\circ 2)\circ 3)\circ 4=$	**3p**
	$=3\circ 4=3$	**2p**

c)	$x \circ x = 2(x-3)^2 + 3$, $x \circ x \circ x = 4(x-3)^3 + 3$	**2p**
	$4(x-3)^3 + 3 = x \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$ sau $x = 3$ sau $x = \frac{7}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' - (\ln x)' =$	**2p**
	$= 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$	**3p**
b)	$f''(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty) \Rightarrow f$ este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	**1p**
	$x \in (0,1] \Rightarrow f'(x) \le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x \in [1,+\infty) \Rightarrow f'(x) \ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1) = 1$, obținem $f(x) \ge 1$, deci $\ln x \le x - 1$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1) f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1\,dx = x\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - 0 = 1$	**2p**
b)	$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx =$	**2p**
	$= x\Big\vert_0^1 - \operatorname{arctg} x\Big\vert_0^1 = 1 - \operatorname{arctg}1 = 1 - \frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$\int_n^{n+1} 2x f(x)\,dx = \int_n^{n+1} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1)\Big\vert_n^{n+1} = \ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}$	**3p**
	$\ln\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \ln 2 \Leftrightarrow n^2 - 2n = 0 \Leftrightarrow n = 0$ sau $n = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_2 - a_1 = 3$	**3p**
	$a_3 = 10$	**2p**
2.	$x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = 1$	**2p**
	$4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 4 \cdot 1 - 4 = 0$	**3p**
3.	$2^{2x+1} = 2^{-3} \Leftrightarrow 2x + 1 = -3$	**3p**
	$x = -2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii de 15 sunt numerele 15, 30, 45, 60, 75 și 90, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$	**1p**
5.	$m_{AB} = 0$, $m_{AC} = \dfrac{a-1}{3}$	**2p**
	$m_{AB} = m_{AC} \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{3} = 0 \Leftrightarrow a = 1$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \dfrac{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 0 - 1 = -1$	**3p**
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= xy\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xyI_2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(3^a\right)A\left(3^{a+1}\right)A\left(3^{a+2}\right) = A\left(3^{3a+3}\right)$	**3p**
	$A\left(3^{3a+3}\right) = A(27) \Rightarrow 3^{3a+3} = 3^3$, de unde obținem $a = 0$	**2p**
2.a)	$f = X^3 + X^2 + 2X - 4 \Rightarrow f(1) = 1^3 + 1^2 + 2 \cdot 1 - 4 =$	**3p**
	$= 1 + 1 + 2 - 4 = 0$	**2p**

b)	$f(-2)=0 \Rightarrow m=4$, deci $f=X^3+4X^2+2X-4$	**3p**
	$f(-3)=-27+36-6-4=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, $x_1x_2x_3=4$	**3p**
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}+(x_1+x_2+x_3)=\frac{1}{2}-m$, deci $m=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+2017)'e^x-(x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2}=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=2017$, $f'(0)=-2016$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-2016x+2017$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x+2015}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[-2015,+\infty)$, deci f este convexă pe $[-2015,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\operatorname{arctg}x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=\frac{\pi}{4}+c\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=\operatorname{arctg}x+1$	**3p**
c)	$\int_0^n xf(x)dx=\int_0^n\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^n=\frac{1}{2}\ln(n^2+1)$	**3p**
	$\frac{1}{2}\ln(n^2+1)=\frac{1}{2}\ln 5$, deci $n^2+1=5$, de unde obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=(3+2i)+(3-2i)=$	**2p**
	$=6$, care este număr real	**3p**
2.	$f(2)=m \Leftrightarrow 4-3=m$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$3^{3x-5}=3^{-2} \Leftrightarrow 3x-5=-2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A, multiplii de 5 sunt numerele 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=2x+1$	**3p**
	$C\in AB \Leftrightarrow 1=2m+1 \Leftrightarrow m=0$	**2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&0&1\\3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+3-0-0-2=1$	**3p**
b)	$A(x)+A(x+2)=\begin{pmatrix}x&x+1&1\\2&x&1\\3&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+2&x+3&1\\2&x+2&1\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+2&2x+4&2\\4&2x+2&2\\6&0&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(2)=\begin{pmatrix}4&6&2\\4&4&2\\6&0&2\end{pmatrix}$, deci $x=1$	**3p**
c)	Punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$ sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}n&n+1&1\\2&n&1\\3&0&1\end{vmatrix}=0$	**2p**
	$n^2-2n+1=0$, deci $n=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3+a\cdot 1^2+1-1=a+1$	**2p**
	$f(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+(-1)-1=a-3 \Rightarrow f(1)-f(-1)=a+1-a+3=4$, pentru orice număr real a	**3p**

b)	$f = X^3 + 2X^2 + X - 1$, câtul este $X + 1$ Restul este $-X - 2$	**3p** **2p**
c)	$x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1$, $x_1x_2x_3 = 1$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1 \Leftrightarrow -a + 1 = 1 - 1$, deci $a = 1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2 - x + 1)\cdot 1}{(x-1)^2} =$ $= \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(2) = 3$, $f'(2) = 0$ Ecuația tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, adică $y = 3$	**2p** **3p**
c)	$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)(e^x + 1)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} \cdot \frac{x}{e^x + 1}\right) =$ $= 1 \cdot 0 = 0$, deoarece $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x(x-1)} = 1$ și $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = \int_0^1 (e^x + 2x - 2x)\,dx = \int_0^1 e^x\,dx = e^x \Big\vert_0^1 =$ $= e^1 - e^0 = e - 1$	**3p** **2p**
b)	$g(x) = 2x \Rightarrow V = \pi\int_0^1 g^2(x)\,dx = \pi\int_0^1 4x^2\,dx =$ $= 4\pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 = \frac{4\pi}{3}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^a x f(x)\,dx = \int_0^a x(e^x + 2x)\,dx = (x-1)e^x \Big\vert_0^a + 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^a = (a-1)e^a + 1 + \frac{2a^3}{3}$ $(a-1)e^a + 1 + \frac{2a^3}{3} = 1 + \frac{2a^3}{3} \Leftrightarrow (a-1)e^a = 0 \Leftrightarrow a = 1$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1 = a_3 - 2r = 10 - 6 =$ $= 4$	**3p** **2p**
2.	$f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 - m + 2m = 3$ $m = 2$	**3p** **2p**
3.	$4^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4^x = 4^{-1}$ $x = -1$	**3p** **2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $3 \cdot 2 = 6$ numere	**2p** **3p**
5.	$x_M = 3$ și $y_M = 3$, unde M este mijlocul segmentului AB $m_{AB} = -1 \Rightarrow m_{\text{mediatoare}} = 1$, deci ecuația mediatoarei segmentului AB este $y = x$	**2p** **3p**
6.	$BC = 10$ $R = 5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 5 = -4$	**2p** **3p**
b)	$A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$ $A(2017) + A(-2017) = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} = A(x) + A(-x)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = q = 1$	**3p** **2p**
2.a)	$x \circ y = xy + 6x + 6y + 36 - 6 =$ $= x(y+6) + 6(y+6) - 6 = (x+6)(y+6) - 6$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$x \circ (-5) = (x+6) \cdot (-5+6) - 6 = x$ $(-5) \circ x = (-5+6) \cdot (x+6) - 6 = x = x \circ (-5)$, pentru orice număr real x	**2p** **3p**
c)	$(x+6)(-2017+6) - 6 = (2017+6)(-6+6) - 6$ $x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'+(\ln x)'=$	**2p**
	$=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-x+3$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**1p**
	$x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**1p**
	$f(x)\ge f(2)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=1+\ln 2$, obținem $\frac{2}{x}+\ln x\ge 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 2x\,f(x)\,dx=\int_1^2 2x\cdot\frac{x^2+2}{2x}\,dx=\int_1^2\left(x^2+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\left(\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{3}+2\right)=\frac{13}{3}$	**2p**
b)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=1\Rightarrow c=\frac{3}{4}$, deci $F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln x+\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$2\int_1^n\left(f(x)+x\,f'(x)\right)dx=2\int_1^n\left(x\,f(x)\right)'dx=2\left.\left(x\,f(x)\right)\right\|_1^n=\left.\left(x^2+2\right)\right\|_1^n=$	**3p**
	$=\left(n^2+2\right)-(1+2)=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1b_3=b_2^2$	**2p**
	$b_1b_2b_3=b_2^3=4^3=64$	**3p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$g\left(f(1)\right)=g(0)=2018$	**3p**
3.	$5^{2x}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-2x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 10 numere care au cifra zecilor egală cu 9, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{90}=\dfrac{1}{9}$	**2p**
5.	$m_d=\dfrac{a-1}{a^2}$	**2p**
	Dreapta d este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow\dfrac{a-1}{a^2}=0$, deci $a=1$	**3p**
6.	Cum $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$	**2p**
	$\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\dfrac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3&1\\1&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}3&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\cdot(-2)-1\cdot1=$	**3p**
	$=-6-1=-7$	**2p**
b)	$xA(y)-yA(x)=x\begin{pmatrix}y+2&y\\1&-2\end{pmatrix}-y\begin{pmatrix}x+2&x\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+2x-yx-2y&xy-yx\\x-y&-2x+2y\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}2(x-y)&0\\x-y&-2(x-y)\end{pmatrix}=(x-y)\begin{pmatrix}2&0\\1&-2\end{pmatrix}=(x-y)A(0)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$aA(-1)-(-1)A(a)=(a+1)A(0)\Rightarrow\left(aA(-1)+A(a)\right)A(0)=(a+1)A(0)A(0)=4(a+1)I_2$	**3p**
	$4(a+1)=a^2+7\Leftrightarrow a=1$ sau $a=3$	**2p**
2.a)	$f=4X^3-6X+2\Rightarrow f(1)=4\cdot1^3-6\cdot1+2=$	**3p**
	$=4-6+2=0$	**2p**

b)	Restul împărțirii polinomului f la X^2+X+1 este egal cu $-6X+m+4$ Cum pentru orice număr real m restul este nenul, polinomul f **nu** se divide cu X^2+X+1	**3p** **2p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-\frac{3}{2}$, $x_1x_2x_3=-\frac{m}{4}\Rightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1}{x_1x_2x_3}=\frac{6}{m}$ $\left(\frac{6}{m}\right)^2=-\frac{4}{m}$ și, cum m este număr real nenul, obținem $m=-9$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$ $=-\frac{1-\ln x-1}{x^2}=\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$ $f(x)\ge f(1)\Rightarrow f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $f\left(\sqrt{x}\right)\ge 0\Rightarrow 1-\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\ge 0$, deci $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2\left(3x^3+3x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{3x^4}{4}+x^3+x\right)\right\vert_0^2=$ $=12+8+2=22$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{1}{x+1}\right)e^{x^3}dx=\int_0^1 3x^2e^{x^3}dx=\left.e^{x^3}\right\vert_0^1=$ $=e-1$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}dx=-\left.\frac{\pi}{x+1}\right\vert_0^1=-\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{n}=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow n=2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}=\dfrac{7+15}{2}=$	**3p**
	$=11$	**2p**
2.	$3n+2<8 \Leftrightarrow n<2$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**
3.	$x^2-1=(x+1)^2 \Rightarrow 2x+2=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine	**2p**
4.	$C_5^3=\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
5.	$m_{d_1}=\dfrac{1}{2}$, $m_{d_2}=m-3$	**2p**
	d_1 și d_2 sunt perpendiculare $\Leftrightarrow m_{d_1}\cdot m_{d_2}=-1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}(m-3)=-1 \Leftrightarrow m=1$	**3p**
6.	$\sin 2x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow (\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1+\sin 2x=$	**3p**
	$=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(3,1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(3,1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-9\cdot 1=$	**3p**
	$=9-9=0$	**2p**
b)	$X(a,b)X(c,d)=\begin{pmatrix}a & b\\ 9b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c & d\\ 9d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+9bd & ad+bc\\ 9bc+9ad & 9bd+ac\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}ac+9bd & ad+bc\\ 9(ad+bc) & ac+9bd\end{pmatrix}=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d	**2p**
c)	$\det(X(m,n))=m^2-9n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, $(m-3n)(m+3n)=1 \Rightarrow m-3n=m+3n=-1$ sau $m-3n=m+3n=1$ și obținem $(-1,0)$ sau $(1,0)$	**3p**
2.a)	$f=2X^3-4X^2-7X+9 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3-4\cdot 1^2-7\cdot 1+9=$	**2p**
	$=2-4-7+9=0$	**3p**
b)	$f(-\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow 2\cdot(-2\sqrt{2})-4\cdot 2-7\cdot(-\sqrt{2})+m=0$	**3p**
	$m=8-3\sqrt{2}$	**2p**

c)	$x_1+x_2=1$ și $x_1+x_2+x_3=2\Rightarrow x_3=1$ $f(1)=0\Rightarrow m=9$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'=$ $=e^x+(x-1)e^x=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x-1}{e^{-x}}+1\right)=1$, deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ $f\left(\frac{1}{n}\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\left(\frac{1}{n}-1\right)e^{\frac{1}{n}}+1\geq 0\Rightarrow\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$	**3p** **2p**
2.a)	$\int\limits_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\int\limits_2^3 x(x-2)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big\vert_2^3=$ $=9-9-\frac{8}{3}+4=\frac{4}{3}$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\sqrt{xe^x}\Rightarrow V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int\limits_0^1 xe^x\,dx=\pi(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$ $=0-\pi\cdot(-1)\cdot e^0=\pi$	**3p** **2p**
c)	$\int\limits_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=\int\limits_3^x t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big\vert_3^x=\frac{x^2-9}{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int\limits_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{2x^2}=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+i+(i-1)(1+i)-(i-1)=1+i+\left(i^2-1\right)-i+1=$	**3p**
	$=1+i-2-i+1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**2p**
	$f\left(f(1)\right)=f(0)=1$	**3p**
3.	$x^2-5x+7=3\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale pare de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 5, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**2p**
5.	$x_A+x_C=6$, $x_B+x_D=6\Rightarrow x_A+x_C=x_B+x_D$	**2p**
	$y_A+y_C=6$, $y_B+y_D=6\Rightarrow y_A+y_C=y_B+y_D\Rightarrow$ segmentele AC și BD au același mijloc, deci $ABCD$ este paralelogram	**3p**
6.	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{tg}x=1$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**
	$\sin\dfrac{\pi}{4}+3\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$X(1)=\begin{pmatrix}1&5\\1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(X(1)\right)=\begin{vmatrix}1&5\\1&1\end{vmatrix}=1\cdot1-1\cdot5=$	**3p**
	$=1-5=-4$	**2p**
b)	$X(-a)+X(a)=\begin{pmatrix}-a&5\\1&-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&5\\1&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&10\\2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-2018&5\\1&-2018\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2018&5\\1&2018\end{pmatrix}=X(-2018)+X(2018)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}ab+5&5(a+b)\\a+b&ab+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b&10\\2&a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $a+b=2$ și $ab=-3$, obținem perechile $(-1,3)$ și $(3,-1)$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-X+2\Rightarrow f(2)=2^3-2\cdot2^2-2+2=$	**3p**
	$=8-8-2+2=0$	**2p**
b)	$f(-1)=0\Rightarrow m=2$, deci $f=X^3-2X^2-X+2$	**3p**
	Restul împărțirii lui f la X^2-3X+2 este 0, deci f se divide cu X^2-3X+2	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$, $x_1x_2x_3=-m$	**3p**
	$\dfrac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{x_1x_2x_3}=6 \Leftrightarrow \dfrac{6}{-m}=6$, deci $m=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}+\dfrac{1\cdot(x+2)-(x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}+\dfrac{1\cdot(x+3)-(x+2)\cdot 1}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}+\dfrac{x+2-x-1}{(x+2)^2}+\dfrac{x+3-x-2}{(x+3)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}+\dfrac{1}{(x+3)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+2}{x+3}\right)=3$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,+\infty)$	**2p**
	f este continuă pe $(-1,+\infty)$, $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=-\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$, deci $\operatorname{Im} f=(-\infty,3)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 (f(x)-\ln x)dx=\int_1^2(3x^2+2x+1)dx=\left.\left(x^3+x^2+x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=(8+4+2)-(1+1+1)=11$	**2p**
b)	$\int_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\left(3x+2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)dx=\left.\left(\dfrac{3x^2}{2}+2x+\ln x\right)\right\|_1^e+\int_1^e\dfrac{\ln x}{x}dx=$	**3p**
	$=\dfrac{3e^2+4e-5}{2}+\left.\dfrac{1}{2}\ln^2 x\right\|_1^e=\dfrac{3e^2+4e-4}{2}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^a \|f(x)\|dx=\int_1^a\left(3x^2+2x+1+\ln x\right)dx=\left.\left(x^3+x^2+x\right)\right\|_1^a+\left.(x\ln x-x)\right\|_1^a=a^3+a^2+a\ln a-2$	**3p**
	$a^3+a^2+a\ln a-2=a^3+a^2+a-2\Rightarrow \ln a=1$, deci $a=e$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{12}=\sqrt{3}\left(3-1\right)-2\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f(1)=g(1)\Leftrightarrow 1^2+2\cdot 1+3=1+a\Leftrightarrow 6=1+a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$x+1=1-2\sqrt{x}+x\Rightarrow 2\sqrt{x}=0$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$m_{d_1}=a$, $m_{d_2}=\frac{1}{4}$	**2p**
	Dreptele d_1 și d_2 sunt paralele $\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)\cos(2\pi+x)-\sin(2\pi+x)\cos(\pi-x)=\sin x\cos x-\sin x(-\cos x)=$	**3p**
	$=2\sin x\cos x=\sin 2x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(M(1)\right)=\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 3 & 3\end{vmatrix}=(-2)\cdot 3-3\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-6+6=0$	**2p**
b)	$M(x)-M(2018)=\left(I_2+xA\right)-\left(I_2+2018A\right)=I_2+xA-I_2-2018A=$	**2p**
	$=\left(I_2+(-2018)A\right)-\left(I_2+(-x)A\right)=M(-2018)-M(-x)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$(I_2+mA)(I_2+nA)=I_2+mnA\Leftrightarrow I_2+mA+nA+mnA\cdot A=I_2+mnA$ și, cum $A\cdot A=-A$, obținem $m+n-mn=mn$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale nenule, $m+n=2mn\Rightarrow(m,n)=(1,1)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=8xy+x+y+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=$	**3p**
	$=8x\left(y+\frac{1}{8}\right)+\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}=8\left(x+\frac{1}{8}\right)\left(y+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{8}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$8\left(x+\frac{1}{8}\right)^2-\frac{1}{8}=1\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$	**3p**
	$x=-\frac{1}{2}$ sau $x=\frac{1}{4}$	**2p**

c)	$f(x\circ y)=8(8xy+x+y)+1=64xy+8x+8y+1=(8x+1)(8y+1)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$f(x\circ y\circ z)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+3)-(x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-2x+3}{(x^2+3)^2}=\dfrac{(1-x)(x+3)}{(x^2+3)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=\dfrac{1}{3}$, $f'(0)=\dfrac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1,+\infty)$	**3p**
	$1<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}\Rightarrow f(\sqrt{2})>f(\sqrt[3]{3})$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\frac{x f(x)}{e^x}dx=\int_0^3\frac{x^2e^x}{e^x}dx=\int_0^3 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=xe^x$, $F''(x)=(x+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1)$, $F''(-1)=0$ și $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are un singur punct de inflexiune	**3p**
c)	$\displaystyle\mathcal{A}=\int_0^n\|f(x)\|dx=\int_0^n xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big\|_0^n=(n-1)e^n+1$	**3p**
	$(n-1)e^n+1=1\Leftrightarrow n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 \cdot q^2 =$	**3p**
	$= 1 \cdot 5^2 = 25$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	$x = 2$, $x = 3$	**3p**
3.	$\sqrt{2x} = 4 - x \Rightarrow 2x = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0$	**3p**
	$x = 2$, care convine, $x = 8$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{7}{49} = \dfrac{1}{7}$	**1p**
5.	Punctul $M(-3,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuația medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$\sin x(3\sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3\cos x) = 3\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos x\sin x + 3\cos^2 x =$	**2p**
	$= 3(\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) - (-4)\cdot 4 =$	**3p**
	$= 1 + 16 = 17$	**2p**
b)	$A(2019-a) + A(2019+a) = \begin{pmatrix} 2019-a & 4 \\ -4 & 2019-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2019+a & 4 \\ -4 & 2019+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix} = 2A(2019)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy-16 & 4x+4y \\ -4x-4y & xy-16 \end{pmatrix}$, $2A(-8) = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$	**3p**
	$xy = 0$ și $x + y = 2$, deci $x = 0$, $y = 2$ sau $x = 2$, $y = 0$	**2p**
2.a)	$x * 0 = \dfrac{4x + 4\cdot 0}{4 + x\cdot 0} = \dfrac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$	**2p**
	$0 * x = \dfrac{4\cdot 0 + 4\cdot x}{4 + 0\cdot x} = \dfrac{4x}{4} = x$, pentru orice $x \in G$, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”	**3p**
b)	$\dfrac{8x}{4 + x^2} = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 4$, care nu convine	**2p**

c)	$f(x)*f(y)=\dfrac{4f(x)+4f(y)}{4+f(x)f(y)}=\dfrac{4\cdot\dfrac{2(x-1)}{x+1}+4\cdot\dfrac{2(y-1)}{y+1}}{4+\dfrac{4(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=\dfrac{2(xy+x-y-1+xy-x+y-1)}{xy+x+y+1+xy-x-y+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{4(xy-1)}{2(xy+1)}=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2+\dfrac{2}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x-2+2}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-1,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(0)\Rightarrow 1-2x+2\ln(x+1)\leq 1$, deci $\ln(x+1)\leq x$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$\cos x>-1$, pentru orice $x\in(0,\pi)$, deci $\ln(1+\cos x)\leq\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}f(x)e^x dx=\int\limits_{-1}^{1}(x+3)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{1}{2}+3\right)-\left(\dfrac{1}{2}-3\right)=6$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int\limits_0^n\lvert f(x)\rvert\,dx=\int\limits_0^n(x+3)e^{-x}dx=-(x+4)e^{-x}\Big\vert_0^n=-(n+4)e^{-n}+4$	**3p**
	$-(n+4)e^{-n}+4=4-6e^{-n}$, de unde obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE
Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=4$, $a_3=6$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=2+4+6=12$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$	**3p**
	Abscisele sunt $x=1$ și $x=9$	**2p**
3.	$5^x(5-3)=2 \Leftrightarrow 5^x\cdot 2=2 \Leftrightarrow 5^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A este un singur număr care verifică ecuația, deci este un caz favorabil	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$, unde M este mijlocul laturii BC	**3p**
	$AM=\sqrt{3}$, deci lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ este egală cu $2\sqrt{3}$	**2p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$, $\sin(x+\pi)=-\sin x$	**2p**
	$\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\sin^2(x+\pi)=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}5 & -6\\ 2 & -2\end{vmatrix}=5\cdot(-2)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-10+12=2$	**2p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1+4a & -6a\\ 2a & 1-3a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+4b & -6b\\ 2b & 1-3b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4a+4b+4ab & -6b-6ab-6a\\ 2a+2ab+2b & 1-3a-3b-3ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+4(a+b+ab) & -6(a+b+ab)\\ 2(a+b+ab) & 1-3(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(m+n+mn)=A(2) \Leftrightarrow m+n+mn=2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, $(m+1)(n+1)=3 \Rightarrow m=2$, $n=0$ sau $m=0$, $n=2$	**3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$	**2p**
	$=2x(y-1)-2(y-1)+1=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=2(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2019^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(e\ln x)'=$	**2p**
	$=1-e\cdot\frac{1}{x}=\frac{x-e}{x},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu axa $Ox\Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$a-e=0\Leftrightarrow a=e$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x=x^e\Leftrightarrow x=\ln x^e\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum f este continuă și $f(e)=0$, ecuația $e^x=x^e$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3(x-1)(x+1)dx=\int_0^3(x^2-1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right\|_0^3=$	**3p**
	$=9-3=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\|f(x)\|dx=\int_1^2(x^2-1)e^xdx=\left.(x^2-1)e^x\right\|_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=$	**2p**
	$=3e^2-0-2\left.(x-1)e^x\right\|_1^2=3e^2-2e^2=e^2$	**3p**
c)	$\int_2^a\frac{2xe^x}{f(x)}dx=\int_2^a\frac{2x}{x^2-1}dx=\left.\ln(x^2-1)\right\|_2^a=\ln\frac{a^2-1}{3}$	**3p**
	$\ln\frac{a^2-1}{3}=3\ln 2\Leftrightarrow a^2-25=0$ și, cum a este număr real, $a>2$, obținem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$(1+i)^2-2i=1+2i+i^2-2i=$	**3p**
	$=1+(-1)=0$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}\Rightarrow-\frac{8}{2m}=12$	**3p**
	$m=-\frac{1}{3}$	**2p**
3.	$x^2-10x+40=4^2\Rightarrow x^2-10x+24=0$	**3p**
	$x=4$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 50 de numere impare, deci sunt 50 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{50}{100}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{BA}=4\vec{i}-\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+3\vec{j}\Rightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=6\vec{i}+2\vec{j}$	**2p**
	$BD=2\sqrt{10}$	**3p**
6.	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin\pi+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(1)=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(1))=\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$M(a)M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A$	**2p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}4&4\\12&12\end{pmatrix}=4A$, obținem $M(a)M(b)=I_2+(a+b+4ab)A=M(a+b+4ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$M\left(a+a+4a^2\right)=M(2)\Leftrightarrow 4a^2+2a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x\Leftrightarrow(x-5)(x-4)\leq0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**

c)	$x*5=x$ și $5*x=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*(-2018)*2019=\left(\left(1*(-2)*3*(-4)\right)*5\right)*(-6)*\ldots*(-2018)*2019=$ $=5*\left((-6)*\ldots*(-2018)*2019\right)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+6)e^x-\left(x^2+6x+9\right)e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2-4x-3}{e^x}=\dfrac{-(x+1)(x+3)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+6x+9}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+6}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-3,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$ și, cum $f(-1)=4e$, obținem $f(x)\leq 4e$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$0\leq x+3\leq 2e^{\frac{x+1}{2}}$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$ și $0\leq y+3\leq 2e^{\frac{y+1}{2}}$, pentru orice $y\in[-3,+\infty)$, deci $0\leq(x+3)(y+3)\leq 4e^{\frac{x+y+2}{2}}$, pentru orice $x,y\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^2(x+1)f(x)dx=\int\limits_0^2 x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{4}-0=4$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)'=\dfrac{3x^2}{3}-\dfrac{2x}{2}+1-\dfrac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^3+x^2-x^2-x+x+1-1}{x+1}=\dfrac{x^3}{x+1}=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
c)	$g(x)=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow\mathcal{A}=\int\limits_1^{a^2}\lvert g(x)\rvert dx=\int\limits_1^{a^2}\dfrac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\vert_1^{a^2}=\ln\left(a^2+1\right)-\ln 2$	**3p**
	$\ln\left(a^2+1\right)=\ln 10\Leftrightarrow a^2-9=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=3$	**2p**