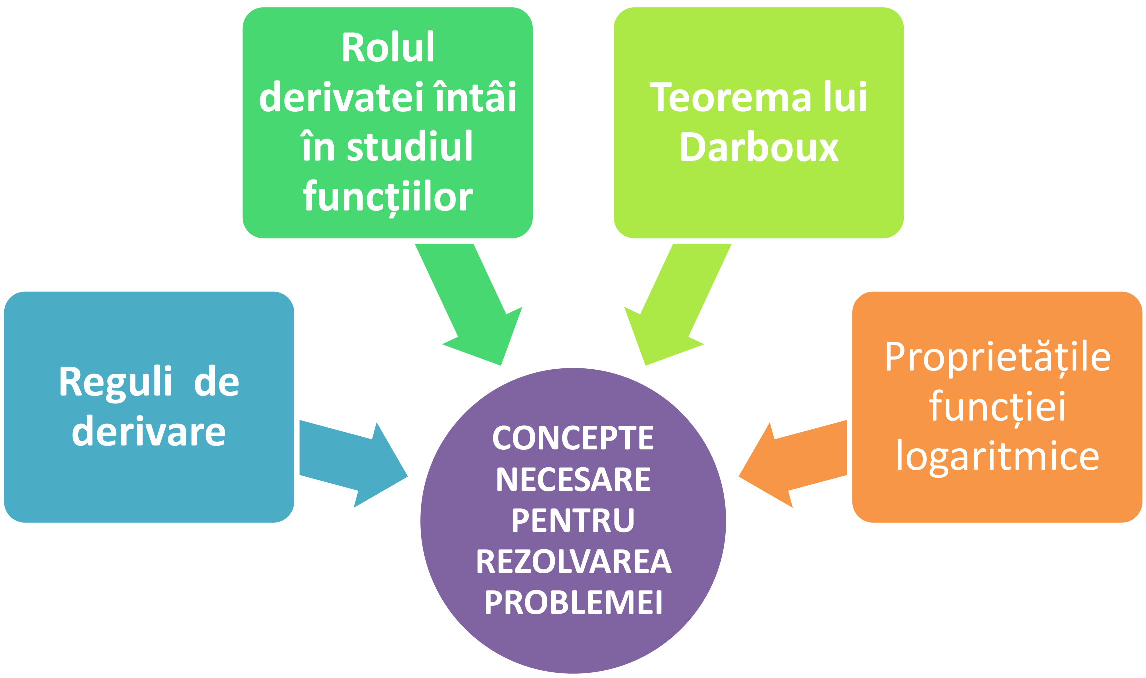
SUBIECTUL III 1 c) – VARIANTA 3- ȘTINȚE- SESIUNEA AUGUST 2020

Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln(x+1)$.

a)Arătați că $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1},\forall x\in(-1,\infty)$.

b)Arătați că funcția f este convexă.

c)Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R},\ g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că , dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.



1° **Regula pentru derivarea lui** u^v

$$\left(u^v\right)'=u^v\cdot\ln u\cdot v'+v\cdot u^{v-1}\cdot u'$$

2° **Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor**

Teoremă Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I.

i)funcția este monoton crescătoare pe intervalul I dacă și numai dacă $f'(x)\ge 0,\forall x\in I$

ii)funcția este monoton descrescătoare pe intervalul I dacă și numai dacă $f'(x)\le 0,\forall x\in I$

3° **Teorema lui Darboux**

Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I. Atunci f' are proprietatea lui Darboux.

CONSECINȚĂ Fie $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I astfel încât $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci f' păstrează semn constant pe I (adică $f'(x) > 0, \forall x \in I$ sau $f'(x) < 0, \forall x \in I$)

Rezolvare: Punctele a) și b) suportă o rezolvare standard.

Punctul c) este cel mai dificil și tocmai de aceea ne vom apleca asupra sa.

COMENTARIUL 1 Cerința problemei poate fi reinterpretată astfel: **a arăta că oricum am alege $x_1, x_2 \in (-1,0]$ astfel $x_1 \le x_2$, atunci** $g(x_1) \ge g(x_2)$ este ***totuna*** cu a arăta că **funcția g este monoton descrescătoare pe intervalul $(-1,0]$.**

METODA I (*ABORDAREA NATURALĂ*)

Cum funcția g este derivabilă , pentru a studia monotonia acesteia trebuie să studiem semnul lui g'.

$$g'(x) = \left((x+1)^x\right)' = (x+1)^x \cdot x' \cdot \ln(x+1) + x \cdot (x+1)^{x-1} \cdot (x+1)' = (x+1)^x \ln(x+1) + x(x+1)^{x-1} =$$

$$= (x+1)^{x-1}\left(\ln(x+1) + x\right), \forall x \in (-1,0]$$

Cum $(x+1)^{x-1} > 0, \forall x \in (-1,0]$ (un număr pozitiv la orice putere este tot un număr pozitiv) , rezultă că semnul lui g' este semnul funcției h , unde $h:(-1,0] \to \mathbb{R}, h(x) = \ln(x+1) + x$. Studiul semnului acestei funcții, h fiind derivabilă deci continuă, revine la a determina eventualele rădăcini ale acesteia și atunci pe intervalele pe care nu se anulează vom ști că aceasta păstrează semn constant (Teorema lui Darboux) .

Dar ecuația $h(x) = 0$ este o ecuație transcendentă (http://www.matestn.ro/mate/PhotoMate/Ecuatii%20transcendente/Ecuatii%20transcendente.pdf) și nu există un algoritm pentru determinarea soluțiilor unei astfel de ecuații. Prin urmare, determinarea eventualelor soluții presupune studiul comportamentului (monotoniei) funcției, adică studiul semnului lui h' în speranța că forma lui $h'(x)$ este controlabilă , dublat de observarea unor soluții particulare observabile cu ochiul liber.

Într-adevăr, $h'(x) = \left(\ln(x+1) + x\right)' = \left(\ln(x+1)\right)' + x' = \dfrac{(x+1)'}{x+1} + 1 = \dfrac{1}{x+1} + 1 = \dfrac{x+2}{x+1}, \forall x \in (-1,0]$.

$h'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x+1}=0 \overset{x\in(-1,0]}{\Leftrightarrow} x\in\varnothing$ (-2 anulează numărătorul fracției $\dfrac{x+2}{x+1}$, dar $-2\notin(-1,0]$).

Utilizând teorema lui Darboux rezultă că semnul lui h' este același pe întreg intervalul $(-1,0]$ și anume **plus** ($h'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{2}+2}{-\dfrac{1}{2}+1}>0$).

OBS: La această concluzie se putea ajunge și dacă observam că $\forall x\in(-1,0]$ avem $x+2>0 \wedge x+1>0$.

Din $h'(x)>0, \forall x\in(-1,0] \Rightarrow h$ este strict crescătoare pe intervalul $(-1,0]$ (1)

Calculăm limitele funcției h în capetele intervalului $(-1,0]$.

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} h(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\left(\ln(x+1)+x\right)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}\ln(x+1)+\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}x \overset{\substack{x+1=y\\x>-1\Rightarrow y>0}}{=} \lim_{\substack{y\to0\\y>0}}\ln y-1=-\infty-1=-\infty \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} h(x) \overset{h \text{ continuă în } 0}{=} h(0)=\ln(0+1)+0=\ln 1=0 \quad (3)$$

x	-1		0
$h'(x)$	|	+ +	
$h(x)$	|	$-\infty$ $\nearrow$	0
$h(x)$	|	− −	0

Din (1),(2),(3) și continuitatea lui h rezultă că funcția noastră se anulează în $x_0=0$ iar în rest ia valori negative.

Toate considerațiile de mai sus ne îndreptățesc să concluzionăm că g' se anulează în $x_0=0$ iar în rest ia valori negative. Prin urmare, funcția g este strict descrescătoare pe intervalul $(-1,0]$ iar acest lucru încheie demonstrația problemei.

METODA II (ȚINEM CONT DE SUBPUNCTUL/SUBPUNCTELE ANTERIOARE – LOGICA INTERNĂ A PROBLEMEI)

COMENTARIUL 2 Reținem că o astfel de abordare poate fi foarte utilă prin aceea că economisim o groază de efort și de timp (multe dintre etapele necesare rezolvării problemei au fost parcurse la subpunctele anterioare). Dificultatea unei astfel de abordări constă în a „face legătura" cu subpunctele anterioare (trebuie să găsiți/observați acea „legătură", trebuie „să-ți pice fisa"!)

În cazul problemei noastre subpunctele a) și b) ne cer să stabilim regula de formare a lui $f'(x)$, respectiv convexitatea lui f. Subpunctul c) ne cere să stabilim o proprietate în legătură cu o nouă funcție g. Se pune în mod natural întrebarea: există vreo legătură între cele două funcții? Cunoașterea proprietăților logaritmilor (experiența pe care ar trebui să o aveți) furnizează răspunsul la întrebarea anterioară: $\ln g(x) = \ln(x+1)^x = x\ln(x+1) = f(x), \forall x \in (-1,0]$!!! – Evident, deoarece $(x+1)^x > 0, \forall x \in (-1,0]$, are sens să vorbim despre $\ln g(x), \forall x \in (-1,0]$.

Cerința problemei poate fi reinterpretată astfel: **a arăta că oricum am alege** $x_1, x_2 \in (-1,0]$ **astfel încât** $x_1 \le x_2$ **, atunci** $g(x_1) \ge g(x_2)$ este ***totuna*** cu a arăta că **oricum am alege** $x_1, x_2 \in (-1,0]$ **astfel încât** $x_1 \le x_2$ **, atunci** $\underbrace{\ln g(x_1)}_{f(x_1)} \ge \underbrace{\ln g(x_2)}_{f(x_2)}$ (funcția $\ln$ este strict crescătoare, deci argumentele funcției se „așează" la fel ca și valorile funcției).

În felul acesta am redus rezolvarea subpunctului c) la determinarea monotoniei funcției f, mai precis la a arăta că funcția f **este monoton descrescătoare pe intervalul** $(-1,0]$.

Pentru acest lucru trebuie să controlăm semnul lui f' (care tocmai a fost calculată la subpunctul a))

Pentru acest lucru trebuie să determinăm eventualele valori din intervalul $(-1,0]$ unde se anulează funcția f', adică încercăm să rezolvăm ecuația $f'(x) = 0, x \in (-1,0]$ care este o ecuație transcendentă.

Prin urmare, pentru a spune ceva despre rădăcinile lui f' ar fi bine să-i studiem monotonia, deci trebuie să calculăm f'' și să-i studiem semnul (calculul lui f'' cât și stabilirea semnului lui f'' au fost făcute la subpunctul b) atunci când a trebuit să decidem asupra convexității funcției f)

În continuare suntem nevoiți să parcurgem acești pași deoarece noi ne-am ocupat doar de rezolvarea subpunctului c)

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1},\forall x\in(-1,\infty)\Rightarrow f''(x)=\frac{(x+1)'}{x+1}+\frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2},\forall x\in(-1,\infty)$$

Se observă imediat că $f''(x)>0,\forall x\in(-1,\infty)\Rightarrow f'$ este strict crescătoare pe $(-1,\infty)$ și că

$f'(0)=\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}=\ln 1=0$, adică 0 este rădăcină a derivatei. Tabelul de mai jos ne va ajuta să concluzionăm asupra semnului lui f' și asupra monotoniei lui f !

x	-1		0		∞
$f''(x)$		$+++++++++++++++++$	$+++$	$+++++++++++++++++++++$	
$f'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$-------------$	0	$++++++++++++++++++++++++++$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Deoarece $f'(0)=0$ și f' strict crescătoare pe $(-1,\infty)$ rezultă că :

i)oricum alegem $-1<x<0\Rightarrow f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$

ii) oricum alegem $0<x\Rightarrow f(0)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$

ceea ce explică semnul derivatei. Din tabel rezultă acum că f **este strict descrescătoare pe intervalul** $(-1,0]$ iar acest lucru încheie demonstrația subpunctului c)

https://youtu.be/OTERSrkJk-Y