Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=1-\left(i\sqrt{2}\right)^2=1-2i^2=1-2(-1)=$	**3p**
	$=1+2=3$, care este număr natural	**2p**
2.	$f(x)+f(1-x)=3x+a+3(1-x)+a=2a+3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2a+3=7\Rightarrow a=2$	**2p**
3.	$5^x+5^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(5^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$5^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor cu trei elemente ale lui A, care îl conțin pe 1, este egal cu numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{2,3,4,5\}$, deci este egal cu $C_4^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4!}{2!(4-2)!}=6$	**2p**
5.	$m_{OM}=-1$ și, cum $m_{OM}\cdot m_d=-1$, obținem $m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y-y_M=m_d\left(x-x_M\right)$, deci $y=x+8$	**3p**
6.	$\sin B=\dfrac{AC}{BC}$	**2p**
	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}0&1&2\\1&2&3\\1&2&4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+4+3-4-0-4=-1$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=-\left(a^2-a+1\right)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2-a+1\neq 0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Cum $a\in\mathbb{Z}$, inversa matricei $A(a)$ are toate elementele numere întregi dacă $\det\left(A(a)\right)$ este divizor al lui 1 și, cum $\det\left(A(a)\right)<0$, pentru orice număr real a, obținem că $\det\left(A(a)\right)=-1$	**3p**
	$a=0$ sau $a=1$, care convin	**2p**
2.a)	$1*2020=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{1^3\cdot 2020^3-1^3-2020^3+9}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{-1+9}=\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{8}=1$	**2p**

b)	$x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+1+8}=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3\left(y^3-1\right)-\left(y^3-1\right)+8}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+\frac{1}{8}\cdot 8}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, pentru orice $x,y\in A$	**2p**
c)	$x*x=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2+1}$, pentru orice $x\in A$, deci $\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)^2+1=x^3$	**2p**
	$\left(x^3-1\right)^2=8\left(x^3-1\right)$, deci $x^3-1=0$ sau $x^3-1=8$, de unde $x=1$ sau $x=\sqrt[3]{9}$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}+\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-(x-1)}{x^2}=\frac{-x(x-1)+(x-2)^2}{x(x-1)(x-2)^2}=$	**3p**
	$=\frac{-x^2+x+x^2-4x+4}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in(2,+\infty)\Rightarrow f'(x)<0$, deci f strict descrescătoare pe $(2,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem că $f(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}>0$, deci $\frac{1}{x-2}>-\ln\frac{x-1}{x}$, de unde obținem că $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)dx=\int_0^1\left(x^3+1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)^2dx=\int_0^1 x^2dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{\left(x^3+1\right)'}{x^3+1}dx=$	**3p**
	$=\left.\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\right\|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 f\left(x^n\right)dx=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}dx$ și, cum $0\le\frac{x^n}{\sqrt{x^{3n}+1}}\le x^n$, pentru $x\in[0,1]$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, obținem că $0\le I_n\le\int_0^1 x^ndx$	**3p**
	$0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru fiecare număr natural nenul n și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+2\sqrt{2}+\frac{3-2\sqrt{2}}{9-8}=$	**3p**
	$=3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}=6$, care este număr natural	**2p**
2.	$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(3)=7$	**3p**
	$f(2)=5$, deci $(f\circ f)(1)=f(2)+2$	**2p**
3.	$3^{2x^2}=3^{x+1}\Leftrightarrow 2x^2=x+1$	**2p**
	$2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**3p**
4.	Numărul submulţimilor cu două elemente ale mulţimii A este C_n^2	**2p**
	$\frac{n!}{2!(n-2)!}=10\Leftrightarrow n^2-n-20=0$ și, cum n este număr natural, obţinem $n=5$	**3p**
5.	$AM=AN$, deci $a=4$	**3p**
	$A(4,3)$, deci $AO=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
6.	$3\cos x-2=4\cos^2 x-2\Leftrightarrow 4\cos^2 x-3\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(4\cos x-3)=0$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\frac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&-5&-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-2)+0+0-0-(-5)-0=3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&2-a&a\\a-1&a-1&1-a\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&2-a&a\\1&1&-1\\a&2a-5&a-2\end{vmatrix}=(a-1)\begin{vmatrix}1&1-a&a+1\\1&0&0\\a&a-5&2a-2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-(a-1)\begin{vmatrix}1-a&a+1\\a-5&2a-2\end{vmatrix}=(a-1)(3a^2-8a-3)=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică $(x_0,y_0,z_0)\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0$, deci, pentru $a\in\mathbb{N}$, obținem $a\in\mathbb{N}\setminus\{1,3\}$ și, cum x_0, y_0, $z_0\in\mathbb{N}$ și $ax_0+y_0+z_0=2-a$, obținem $2-a\in\mathbb{N}$	**3p**
	$a=2$, care nu convine, $a=0$ care convine	**2p**
2.a)	$0*0=\log_2\left(2^0+2^0\right)=\log_2(1+1)=$	**3p**
	$=\log_2 2=1$	**2p**

b)	$x * y = \log_2\left(2^x + 2^y\right) = \log_2\left(2^y + 2^x\right) =$ $= y * x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p** **2p**
c)	$(x * x) * x = \log_2\left(2^x + 2^x\right) * x = \log_2\left(2^{x+1}\right) * x = (x+1) * x = \log_2\left(2^{x+1} + 2^x\right) = \log_2\left(2^x \cdot 3\right)$, unde x este număr real $\log_2\left(2^x \cdot 3\right) = 3 + \log_2 3$, de unde obținem $x = 3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} =$ $= \dfrac{2x\left(2x^2 - 1\right)}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{x\left(2x^2 - 1\right)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = x$	**2p** **3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 0$ sau $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$, f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ și pe $\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, f este strict crescătoare pe $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ și pe $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ Cum $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < m$, $f(0) = 1 > m$ și $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} < m$, obținem că, pentru orice $m \in \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$, ecuaţia $f(x) = m$ are exact patru soluţii reale	**3p** **2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2 x \cdot \frac{x^2 + 2x + 5}{x}\, dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2x + 5\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 5x\right)\right\vert_1^2 =$ $= \dfrac{8}{3} + 4 + 10 - \dfrac{1}{3} - 1 - 5 = \dfrac{7}{3} + 8 = \dfrac{31}{3}$	**3p** **2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 g(x)\, dx = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2 + 2x + 5}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\left(x^2 + 2x + 5\right)'}{x^2 + 2x + 5}\, dx =$ $= \left.\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 5\right)\right\vert_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{8}{5}$	**3p** **2p**
c)	$x^{2n} \geq 0$ și $x^2 + 2x + 5 \geq 4 \Rightarrow 0 \leq \dfrac{x^{2n}}{x^2 + 2x + 5} \leq \dfrac{x^{2n}}{4}$, pentru orice $x \in [-1, 1]$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$ $\displaystyle 0 \leq \int_{-1}^{1} x^{2n-1} f(x)\, dx \leq \int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{4}\, dx$ și, cum $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^{2n}}{4}\, dx = \frac{1}{2(2n+1)}$ și $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2(2n+1)} = 0$, obținem $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2-4z+5=(2+i)^2-4(2+i)+5=4+4i+i^2-8-4i+5=$	**3p**
	$=i^2+1=-1+1=0$	**2p**
2.	$M(0,2)\in G_f \Leftrightarrow f(0)=2$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x^3=x^3+2x \Leftrightarrow 2x=0$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$ are $5!=120$ de elemente, deci sunt 120 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de cinci cifre distincte, formate cu cifre din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, care au cifra zecilor egală cu 2 și cifra unităților egală cu 3, sunt 6, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$	**1p**
5.	$CA=CB \Leftrightarrow \sqrt{(4-0)^2+(a-1)^2}=\sqrt{(4-2)^2+(a-3)^2}$	**3p**
	$16+a^2-2a+1=4+a^2-6a+9 \Leftrightarrow a=-1$	**2p**
6.	$A+B+C=\pi$, $2B=A+C$	**3p**
	$3B=\pi \Rightarrow B=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(xy)\\0&xy&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2+\ln(yx)\\0&yx&0\\0&0&1\end{pmatrix}=A(y)A(x)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$	**3p**
c)	$A\left(\frac{1}{3}\right)A(3)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A\left(\frac{1}{2}\right)A(2)=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A(3)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(2)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow n=5$	**3p**

2.a)	$1*2=1\cdot 2-4(1+2)+10=$ $=2-12+10=0$	**3p** **2p**
b)	$x*5=x\cdot 5-4(x+5)+20=5x-4x-20+20=x$, pentru orice număr real x $5*x=5x-4(5+x)+20=5x-20-4x+20=x$, pentru orice număr real x, deci $e=5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p** **3p**
c)	$x*y=(x-4)(y-4)+a-16$, pentru orice numere reale x și y $x,y\in H \Rightarrow x-4\geq 0$ și $y-4\geq 0$ și, cum $a\geq 20$, obținem $x*y\geq 4\Rightarrow x*y\in H$, deci H este parte stabilă a mulțimii numerelor reale în raport cu legea de compoziție „$*$”	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6^x\ln 6-3^x\ln 3+2^x\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$ $f'(0)=\ln 6-\ln 3+\ln 2=\ln 4$	**3p** **2p**
b)	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ și, cum $f(0)=1$, obținem $y=x\ln 4+1$ $\ln(16e)=a\ln 4+1\Rightarrow 1+\ln 16=\ln\left(4^a\right)+1$, deci $a=2$	**3p** **2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(f(x))}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{f'(0)}{f(0)}=$ $=\dfrac{\ln 4}{1}=\ln 4$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)dx=\int_1^2\left(x^2+3-2x-2\right)dx=\int_1^2\left(x^2-2x+1\right)dx=\dfrac{(x-1)^3}{3}\Big\|_1^2=$ $=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{2x}{x^2+3}-\dfrac{2}{x^2+3}\right)dx=\left(x-\ln\left(x^2+3\right)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)\Big\|_0^1=$ $=1-\ln 4-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\ln 3=1-\ln\dfrac{4}{3}-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}$	**3p** **2p**
c)	Pentru orice $x\in[0,1]$, $f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x+3)}{\left(x^2+3\right)^2}\leq 0\Rightarrow f(1)\leq f(x)\leq f(0)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq\dfrac{1}{3}$ $0\leq I_n\leq\int_0^1\left(\dfrac{1}{3}\right)^n dx$, deci $0\leq I_n\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ și, cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$, obținem că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$	**2p** **3p**