Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=4-1=3$	**2p**
	$a_4=1+3\cdot 3=10$	**3p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1^2+4=a$	**3p**
	$a=5$	**2p**
3.	$3^{2(x-2)}=3^{2-x}\Leftrightarrow 2x-4=2-x$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 21 de numere naturale de două cifre care sunt mai mici sau egale cu 30, deci sunt 21 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{21}{90}=\dfrac{7}{30}$	**2p**
5.	$y-3=1\cdot(x-0)$	**3p**
	$y=x+3$	**2p**
6.	$AD=8$, unde $AD\perp BC$, $D\in BC$	**2p**
	$\sin B=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{4}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}-m&1&1\\1&-m&1\\1&1&-m\end{vmatrix}=(2-m)(m+1)^2$	**3p**
	Pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$, obținem $\det(A(m))\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**2p**
c)	Pentru $m=2$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1+\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $x_0+2y_0+3z_0=9\Leftrightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9\Leftrightarrow \alpha=1$, soluția sistemului care verifică relația este $(2,2,1)$	**2p**
2.a)	$x*y=-2xy+10x+10y-50+5=$	**2p**
	$=-2x(y-5)+10(y-5)+5=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*5=5*y=5$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$((1*2*3*4)*5)*6*7*8*9*10=5*(6*7*8*9*10)=5$	**3p**
c)	$-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=4$, $n=16$ sau $m=16$, $n=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\frac{8}{x}=$	**2p**
	$=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	Cum $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$	**1p**
	$x\in(0,2] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$x\in[2,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x^2-8\ln x\right)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{8\ln x}{x^2}\right)=+\infty$	**2p**
	Cum $f(2)<0$, ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_5^{10}=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
b)	$g(x)=\frac{1}{x-4}$, deci $V=\pi\int_5^6 g^2(x)dx=\pi\int_5^6\frac{1}{(x-4)^2}dx=$	**2p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x-4}\right)\Big\vert_5^6=\frac{\pi}{2}$	**3p**
c)	Pentru $n>4$, $\int_n^{n+1} f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{1}{x(x-4)}dx=\frac{1}{4}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$	**2p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)dx\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\left(1+\frac{4}{n^2-3n-4}\right)^{\frac{n^2-3n-4}{4}}\right)^{\frac{4n^2}{4(n^2-3n-4)}}=\ln e=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 2020$	**2p**
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$	**3p**
	$m = 1$	**2p**
3.	$2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$	**2p**
5.	$y - 2 = \dfrac{5-2}{4-1}(x-1)$	**3p**
	$y = x + 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \dfrac{3}{5}$	**3p**
	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$	**3p**
	Pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det(A(a)) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, 0\right)$	**3p**
	Cum a este număr întreg, $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	**2p**

2.a)	$x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 =$	**3p**
	$= 3x(y+1) + 3(y+1) - 1 = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$f(x \circ y) = 3(x \circ y) + 3 = 3\left(3(x+1)(y+1) - 1\right) + 3 = 9(x+1)(y+1) =$	**3p**
	$= (3x+3)(3y+3) = f(x)\,f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\right) = f\left(3^{2015} - 1\right) \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3 \cdot \left(3^{2015} - 1\right) + 3 \Leftrightarrow \left(f(a)\right)^{2016} = 3^{2016} \Leftrightarrow f(a) = -3$ sau $f(a) = 3$	**3p**
	$a = -2$ sau $a = 0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $x \in (1, +\infty)$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1) \Rightarrow f'(x) = \left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right)' =$	**2p**
	$= \left(\ln(x+1)\right)' - \left(\ln(x-1)\right)' = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$	**3p**
b)	$f''(x) = \dfrac{4x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$	**2p**
	Pentru orice $x \in (1, +\infty)$, $f''(x) > 0$, deci funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(f'(2) + f'(3) + \ldots + f'(n)\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{1}\right) + \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n-1}\right)\right) =$	**3p**
	$= \lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1}\right) = -\dfrac{3}{2}$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \int_1^2 (x+1)\, dx = \left.\left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)\right\|_1^2 =$	**3p**
	$= 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$	**2p**
b)	$\int_1^{e^2} \left(f(x) - \sqrt{x}\right) \ln x\, dx = \int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}} \cdot \ln x\, dx = 2\sqrt{x} \cdot \ln x \Big\|_1^{e^2} - 2\int_1^{e^2} \dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx =$	**3p**
	$= \left.\left(2\sqrt{x} \cdot \ln x - 4\sqrt{x}\right)\right\|_1^{e^2} = 4e - 4e + 4 = 4$	**2p**
c)	$V = \pi \int_1^a g^2(x)\, dx = \pi \int_1^a \left(x + 2 + \dfrac{1}{x}\right) dx = \pi \left.\left(\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln x\right)\right\|_1^a = \pi \left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right)$	**3p**
	$\pi \left(\dfrac{a^2}{2} + 2a + \ln a - \dfrac{5}{2}\right) = \pi \left(\ln a + \dfrac{7}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 + 4a - 12 = 0$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$24+a=2\cdot 1020$ $a=2016$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=16-4m$ $16-4m=0\Rightarrow m=4$	**3p** **2p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x-3}=3^3\Leftrightarrow -2x+3=3$ $x=0$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea A are 25 de elemente, deci sunt 25 de cazuri posibile Sunt 5 numere raționale în mulțimea A, deci sunt 5 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$	**1p** **2p** **2p**
5.	$d\perp BC\Rightarrow m_d\cdot m_{BC}=-1$ și, cum $m_{BC}=1$, obținem $m_d=-1$ Deoarece $A\in d$, ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, adică $y=-x+1$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R\Rightarrow R=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&-1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$ $=0+0+0-0-1-0=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(3a-1)(a+1)$ Pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $\det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p** **3p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$; pentru fiecare număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq\dfrac{1}{3}$, obținem $x_0=\dfrac{-4a}{(3a-1)(a+1)}$ și $y_0=\dfrac{2(2-3a)}{3a-1}$ Cum $x_0=y_0\Leftrightarrow 3a^2-a-2=0$, obținem $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=1$	**2p** **3p**

2.a)	$x*y=-xy+2x+2y-4+2=$	**2p**
	$=-x(y-2)+2(y-2)+2=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=2-(x-2)^2$	**2p**
	$2-(x-2)^2=1\Leftrightarrow(x-2)^2=1\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**3p**
c)	Cum $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$, obținem $(m-2)(n-2)(p-2)=0$	**2p**
	$m=2$ sau $n=2$ sau $p=2$, deci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+(\ln x)'+1'=$	**2p**
	$=e^x+\frac{1}{x}+0=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=e+1$, $f'(1)=e+1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=(e+1)x$	**3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^x+\ln x+1\right)=-\infty$, $f(1)>0$ și f este continuă, atunci ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$	**3p**
2.a)	$I_0=\int_0^1\frac{x}{x+3}dx=\int_0^1\left(1-\frac{3}{x+3}\right)dx=\left(x-3\ln(x+3)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-3\ln 4+3\ln 3=1+3\ln\frac{3}{4}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\frac{x^{n+2}+3x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3}dx=\int_0^1 x^{n+1}dx=$	**3p**
	$=\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$nI_n=n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx=\int_0^1\left(x^n\right)'\frac{x^2}{x+3}dx=x^n\cdot\frac{x^2}{x+3}\Big\vert_0^1-\int_0^1 x^n\cdot\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}dx=\frac{1}{4}-\int_0^1 x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx$ pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	Cum $0\le\int_0^1 x^n\left(1-\frac{9}{(x+3)^2}\right)dx\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ pentru orice număr natural nenul n, obţinem $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{4}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{2}-3\right)^2=11-6\sqrt{2}$	**2p**
	$\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11+6\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=11-6\sqrt{2}+11+6\sqrt{2}=22$	**3p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)f(0)f(1)=0$	**2p**
3.	$x^2-6x+6=1 \Rightarrow x^2-6x+5=0$	**2p**
	$x=1$ sau $x=5$, care verifică ecuația dată	**3p**
4.	Cifra unităților este 8	**2p**
	Cum cifrele sunt distincte, cifra zecilor poate fi aleasă în 3 moduri și, pentru fiecare alegere a acesteia, cifra sutelor poate fi aleasă în câte 2 moduri, deci se pot forma $3\cdot 2\cdot 1=6$ astfel de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d=m_{AB} \Rightarrow m_d=1$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y=x$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\pi-\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$	**3p**
	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&x&x^2+x\\0&1&2x\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&y&y^2+y\\0&1&2y\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&y+x&y^2+y+2xy+x^2+x\\0&1&2y+2x\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y&(x+y)^2+(x+y)\\0&1&2(x+y)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=$ $=A\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=A\left(\frac{2016}{2017}\right)$	**3p**
	$A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right) \Leftrightarrow a=2016$	**2p**

2.a)	$f(1)=0 \Leftrightarrow 1^4+m\cdot 1^2+2=0$ $m=-3$	**2p** **3p**
b)	$x_1+x_2+x_3+x_4=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2=0$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**
c)	$f=X^4+3X^2+2=(X^2+1)(X^2+2)$ Polinoamele X^2+1 și X^2+2 au coeficienți reali, au gradul 2 și nu au rădăcini reale, deci sunt ireductibile în $\mathbb{R}[X]$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$ $=\dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$ Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{-x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$ și funcția f este continuă, atunci pentru orice $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2(x-1)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\|_0^2=$ $=\dfrac{4}{2}-2=0$	**3p** **2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\|f(x)\|dx=\int_1^2(x-1)e^x dx=(x-2)e^x\Big\|_1^2=$ $=0-(-1)e=e$	**3p** **2p**
c)	$\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\int_{-n}^1 xe^x dx=(x-1)e^x\Big\|_{-n}^1=(n+1)e^{-n}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^1\left(f(x)+e^x\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{e^n}=0$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=$	**3p**
	$=4+4-i^2=9$	**2p**
2.	$f(1)=m\Rightarrow 1+2-3=m$	**3p**
	$m=0$	**2p**
3.	$1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților are 36 de elemente, deci sunt 36 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{36}{90}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$M(3,2)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CM=3$	**2p**
6.	$\left(1+\text{tg}^2x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2x\right)\sin^2 x=\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$	**3p**
	$=\cos^2 x+\sin^2 x-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=0$, pentru orice $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(9)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6+(-2)+(-18)-(-8)-(-9)-3=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=9-a$	**3p**
	Sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det\left(A(a)\right)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{9\}$	**2p**
c)	Sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, deci $a=9$ și soluția sistemului este de forma $(5\alpha,-7\alpha,\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	$-x_0+y_0+z_0=-5\alpha+(-7\alpha)+\alpha=-11\alpha=11\left(5\alpha+(-7\alpha)+\alpha\right)=11\left(x_0+y_0+z_0\right)$	**2p**
2.a)	$x\circ y=xy+7x+7y+49-7=$	**2p**
	$=x(y+7)+7(y+7)-7=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x\circ x=(x+7)^2-7$, deci $(x+7)^2-7=x$	**2p**
	$(x+7)(x+6)=0 \Leftrightarrow x=-7$ sau $x=-6$	**3p**
c)	$\left(2017^a+7\right)(-6+7)-7=1 \Leftrightarrow 2017^a+7-7=1$	**3p**
	$2017^a=1 \Leftrightarrow a=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\ln x-x+1 \Rightarrow g'(x)=\ln x$, deci $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	Funcția g este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=0$, obținem $g(x)>0$, deci $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_0^1\left(e^x+3x^2-3x^2\right)dx=\int_0^1 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_0^1=e-1$	**3p**
b)	$\int_0^1 x f(x)dx=\int_0^1\left(xe^x+3x^3\right)dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^1+\dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1\cdot e^0+\dfrac{3}{4}=\dfrac{7}{4}$	**2p**
c)	$g(x)=3x^2 \Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^n\lvert g(x)\rvert dx=\int_0^n 3x^2\,dx=x^3\Big\vert_0^n=n^3$	**3p**
	$n^3=n^2-n+1 \Leftrightarrow (n-1)\left(n^2+1\right)=0 \Leftrightarrow n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4=$ $=0$	**3p** **2p**
2.	$f(1)=0$ $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(0)=-1$	**2p** **3p**
3.	$x+3=x^2-6x+9\Rightarrow x^2-7x+6=0$ $x=1$ care nu convine, $x=6$ care convine	**3p** **2p**
4.	În mulțimea A sunt 100 de numere, deci sunt 100 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 9 numere care sunt multipli de 11, deci sunt 9 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{100}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$P\in Ox\Rightarrow y_P=0$ $PM=PN\Leftrightarrow(2-x_P)^2+(2-0)^2=(4-x_P)^2+(2-0)^2\Leftrightarrow x_P=3$	**2p** **3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{6\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=$ $=6$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&1&2\end{vmatrix}=$ $=4+1+4-2-4-2=1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2^x&4^x\\1&x&2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2^x-1&4^x-1\\0&x-1&2x-1\end{vmatrix}=(2^x-1)\begin{vmatrix}1&2^x+1\\x-1&2x-1\end{vmatrix}=$ $=(2^x-1)(2x-1-x\cdot2^x+2^x-x+1)=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot2^x)$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
c)	$A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2^1+2^2+\ldots+2^{2017}&4^1+4^2+\ldots+4^{2017}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&\dfrac{2(2^{2017}-1)}{2-1}&\dfrac{4(4^{2017}-1)}{4-1}\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2017&2017&2017\\2017&2(2^{2017}-1)&\dfrac{4}{3}(4^{2017}-1)\\2017&2017\cdot1009&2017\cdot2018\end{pmatrix}$	**3p** **2p**

2.a)	$x * y = 7xy + 7x + 7y + 7 - 1 =$	**2p**
	$= 7x(y+1) + 7(y+1) - 1 = 7(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x * x = 7^2(x+1)^3 - 1$, deci $7^2(x+1)^3 - 1 = x$	**2p**
	$(x+1)\left(7^2(x+1)^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}$ sau $x = -1$ sau $x = -\frac{6}{7}$	**3p**
c)	$49(a+1)(b+1)(c+1) - 1 = 48 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1) = 1$	**2p**
	Cum a, b și c sunt numere naturale, obținem $a+1 = b+1 = c+1 = 1$, deci $a = b = c$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{(x^2-3)' \cdot e^x - (x^2-3)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - (x^2-3)e^x}{(e^x)^2} =$	**3p**
	$= \frac{e^x(2x - x^2 + 3)}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1) = -2e$, $f'(-1) = 0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$, adică $y = -2e$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 3$	**1p**
	$x \in [-1,3] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,3]$ și $x \in [3,+\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(-1) = -2e$, $f(3) = \frac{6}{e^3}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, obținem $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, pentru orice $x \in [-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx =$	**2p**
	$= \ln(x+1)\Big\|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$	**3p**
b)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
	$F'(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(0,+\infty)$	**3p**
c)	$g(x) = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^2 \|g(x)\|\,dx = \int_1^2 \frac{x}{x+1}\,dx = x\Big\|_1^2 - \ln(x+1)\Big\|_1^2 = 1 - \ln\frac{3}{2}$	**3p**
	$1 - \ln\frac{m+1}{m} = 1 - \ln\frac{3}{2} \Rightarrow m = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$25-40i+16i^2+25+40i+16i^2=$	**3p**
	$=50+32i^2=50-32=18$	**2p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0$	**3p**
	$x=2$ și $x=4$	**2p**
3.	$x^2-x-2=(x-2)^2 \Rightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4 \Rightarrow 3x=6$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 9 sunt 19, 33 și 91, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{90}=\dfrac{1}{30}$	**1p**
5.	$x_B=\dfrac{x_A+x_M}{2} \Rightarrow x_M=2$	**3p**
	$y_B=\dfrac{y_A+y_M}{2} \Rightarrow y_M=5$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC\cdot\sin(\sphericalangle ABC)=6\cdot 3\cdot\sin 30^\circ=$	**3p**
	$=18\cdot\dfrac{1}{2}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(x)A(y)A(z)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&y\\y&0&0\\0&y&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&xy&0\\0&0&xy\\xy&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&z\\z&0&0\\0&z&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}xyz&0&0\\0&xyz&0\\0&0&xyz\end{pmatrix}=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**

c)	$A(n)A(n)+A(n)+I_3=\begin{pmatrix}0 & n^2 & 0\\ 0 & 0 & n^2\\ n^2 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0 & n\\ n & 0 & 0\\ 0 & n & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & n^2 & n\\ n & 1 & n^2\\ n^2 & n & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1 & n^2 & n\\ n & 1 & n^2\\ n^2 & n & 1\end{vmatrix}=n^6-2n^3+1=\left(n^3-1\right)^2$, care este pătratul unui număr natural	**3p**
2.a)	$f(2)=0\Leftrightarrow 2^4+a\cdot 2^2+4=0$	**3p**
	$4a+20=0\Leftrightarrow a=-5$	**2p**
b)	$f=X^4-5X^2+4$; câtul este X^2-X-2	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$1-a+4=0\Rightarrow a=5$	**2p**
	$f=\left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)$, de unde obținem $x_1=i$, $x_2=-i$, $x_3=2i$ și $x_4=-2i$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=x$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=-\infty$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^1 x\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}+1-\dfrac{1}{e^{-x}+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\int_{-1}^1 x\left(2-\dfrac{e^x+1}{e^x+1}\right)dx=\int_{-1}^1 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^1=0$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{1}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_0^1=\ln\dfrac{e+1}{2}$	**3p**
	Cum $e<3\Rightarrow\dfrac{e+1}{2}<2$, obținem $\mathcal{A}<\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3z_1+2z_2=3(5+2i)+2(3-3i)=15+6i+6-6i=$	**3p**
	$=15+6=21$	**2p**
2.	$x+1=x^2-x+2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	**2p**
	$x=1$	**3p**
3.	$3^{x^2+3}=3^{1+3x} \Leftrightarrow x^2+3=1+3x \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care sunt divizibile cu 3 și cu 5, are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{90}=\dfrac{1}{15}$	**1p**
5.	Ecuația dreptei AB este $y=x+2$	**2p**
	Punctul C aparține dreptei $AB \Leftrightarrow m=-2$	**3p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A=16+64-2\cdot4\cdot8\cdot\dfrac{1}{2}=48$	**3p**
	$BC=4\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-2&0&3\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0+0+0-(-2)-0-0=2$	**2p**
b)	$A(x)A(-x)=\begin{pmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)A(-x))=\begin{vmatrix}2+x^2&0&-x^2-1\\0&1&0\\2+2x^2&0&-2x^2-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=(x^2+2)(-2x^2-1)-(-x^2-1)(2x^2+2)=-x^2\le0$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(m)A(n)=\begin{pmatrix}2-mn&0&mn-1\\0&1&0\\2(1-mn)&0&2mn-1\end{pmatrix}=A(mn)$	**3p**
	$A(mn)=A(2)$, deci $mn=2$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m+n=3$	**2p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow1^3+2\cdot1^2+a\cdot1+1=0$	**2p**
	$a=-4$	**3p**

b)	$f=X^3+2X^2+2X+1$ și câtul este $X+1$ Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1x_2x_3=-1$ și $\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert\Rightarrow\lvert x_1\rvert=\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$ Cum f are cel puțin o rădăcină reală, una dintre rădăcini este egală cu -1 sau cu 1 Dacă $x_1=-1$, obținem $f(-1)=0$, deci $a=2$, ceea ce convine, deoarece $\lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$ Dacă $x_1=1$, obținem $f(1)=0$, deci $a=-4$, ceea ce nu convine, deoarece $\lvert x_2\rvert\neq\lvert x_3\rvert$	**2p** **1p** **1p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-1'-\left(\ln(x+2)\right)'=$ $=e^x-0-\dfrac{(x+2)'}{x+2}=e^x-\dfrac{1}{x+2},\ x\in(-2,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$ $f''(x)\geq 0$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x-1}{x}-\dfrac{\ln(x+2)}{x}\right)=+\infty$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_1^e x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_1^e=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{e^2-1}{2}$	**3p** **2p**
b)	$x\in[1,e]\Rightarrow 0\leq\ln x\leq 1\Rightarrow\ln x-1\leq 0$ $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x\ln^n x(\ln x-1)dx\leq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int_1^e x\ln^{n+1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\Big\vert_1^e-\dfrac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,dx=$ $=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$, deci $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2z_1-3z_2=2(2+3i)-3(1+2i)=$ $=4+6i-3-6i=1$	**2p** **3p**
2.	$x_1+x_2=3m$, $x_1x_2=2\Rightarrow x_1+x_2+x_1x_2+1=3m+3$ $3m+3=0\Leftrightarrow m=-1$	**3p** **2p**
3.	$\log_4\left((x+3)(x-3)\right)=2\Rightarrow x^2-9=4^2\Rightarrow x^2-25=0$ $x=-5$, care nu convine, $x=5$, care convine	**3p** **2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale de două cifre care au produsul cifrelor egal cu 6 sunt 16, 23, 32 și 61, deci sunt 4 cazuri favorabile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{90}=\dfrac{2}{45}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{2}{-3}$ $a=-2$	**3p** **2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=$ $=\sin^2 x+\cos^2 x=1$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=$ $=0+0+1-1-0-1=-1$	**2p** **3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}x&1&1\\x+1&1&1\\1&x&1\end{vmatrix}=x-1$, $\det(A(x+1))=x\Rightarrow(x-1)x=12$ $x=-3$ sau $x=4$	**3p** **2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=1\neq 0$, $(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-2&1&1\\5&-3&-1\end{pmatrix}$ $X=(A(2))^{-1}\cdot A(0)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\-4&2&1\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
2.a)	$f(0)=0^3-(m+2)\cdot 0^2+(m^2+2)\cdot 0-1=$ $=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**

b)	$x_1+x_2+x_3=m+2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m^2+2 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-m^2+4m$	**3p**
	$(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=$ $=2\left(-m^2+4m-m^2-2\right)=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$x_1, x_2, x_3\in\mathbb{R} \Rightarrow x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1\in\mathbb{R} \Rightarrow (x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2\geq 0$, deci $(m-1)^2\leq 0$	**2p**
	$m=1$, caz în care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2e^x\right)'-\left(x^2\right)'-(2x)'-(2)'=$	**2p**
	$=2e^x-2x-2=2\left(e^x-x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$f''(x)=2\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x\in(-\infty,0] \Rightarrow f''(x)\leq 0$, deci f' este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**1p**
	$x\in[0,+\infty) \Rightarrow f''(x)\geq 0$, deci f' este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
	$f'(x)\geq f'(0)$ și $f'(0)=0$ implică $f'(x)\geq 0$ pentru orice număr real x, deci funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
2.a)	$\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=\left.\frac{(x+2)^3}{3}\right\|_{-2}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-0=9$	**2p**
b)	$\int_0^1(x+2)e^x\,dx=\left.(x+2)e^x\right\|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=3e-2-\left.e^x\right\|_0^1=$	**3p**
	$=3e-2-e+1=2e-1$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}\|f(x)\|dx=\int_{-1}^{1}(x+2)^n\,dx=\left.\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\right\|_{-1}^{1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$	**3p**
	$\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1} \Leftrightarrow 3^{n+1}=243 \Leftrightarrow 3^{n+1}=3^5 \Leftrightarrow n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi \Rightarrow 2\overline{z}-z=a-3bi$, unde a și b sunt numere reale	**3p**
	$a-3bi=1-3i \Rightarrow a=1$ și $b=1$, deci $z=1+i$	**2p**
2.	$y_V=0 \Leftrightarrow \Delta=0$	**3p**
	Cum $\Delta=m^2-4$, obținem $m^2-4=0$, deci $m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$2\lg x=\lg(x+2) \Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre, care au cifrele distincte și impare are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Panta dreptei d este $m_d=1 \Rightarrow$ panta unei drepte perpendiculare pe dreapta d este $m=-1$	**3p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x-3$	**2p**
6.	$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$	**2p**
	$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+1-0-0-0=2$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=2(m+1)(2m-1)^2$, pentru orice număr real m	**3p**
	$m=-1$ sau $m=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$a-b=\frac{1}{3}$, $b-c=\frac{1}{3}$ și $a-c=\frac{2}{3}$	**3p**
	Deoarece $a-b\notin\mathbb{Z}$, $b-c\notin\mathbb{Z}$ și $a-c\notin\mathbb{Z} \Rightarrow$ cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg	**2p**
2.a)	$x*y=4xy+3x+3y+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=$	**2p**
	$=4x\left(y+\frac{3}{4}\right)+3\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

b)	$x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$, $x*x*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$4a^2=a$, deci $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=16x-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=8$, $f'(1)=15$, deci ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$	**3p**
	$15\cdot\frac{2}{3}-7=3$, deci punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	Cum $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{7}}<\frac{1}{2}$, obținem $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+3)f(x)dx=\int_0^1(2x+3)dx=\left(x^2+3x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+3-0=4$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x+3}dx=\int_0^1\left(2-\frac{3}{x+3}\right)dx=2x\Big\vert_0^1-3\ln(x+3)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-3(\ln 4-\ln 3)=2-3\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_n=\int_0^1 e^x(2x+3)^n dx=e^x(2x+3)^n\Big\vert_0^1-2n\int_0^1 e^x(2x+3)^{n-1}dx=$	**3p**
	$=e\cdot 5^n-3^n-2nI_{n-1}$, deci $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$z^2-2z+5=(1-2i)^2-2(1-2i)+5=$	**2p**
	$=1-4i+4i^2-2+4i+5=1-4-2+5=0$	**3p**
2.	$M(2,8)\in G_f \Rightarrow f(2)=8\Rightarrow 4+a=8\Rightarrow a=4$	**3p**
	$M(2,8)\in G_g \Rightarrow g(2)=8\Rightarrow 2b+2=8\Rightarrow b=3$	**2p**
3.	$\log_3(4x+5)=\log_3 3(x+3)\Rightarrow 4x+5=3x+9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Numărul numerelor naturale de două cifre, care au cifrele pare este egal cu 20, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**2p**
5.	Punctul B este mijlocul segmentului AM, deci $M(6,0)$	**3p**
	$CM=10$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=2\mathcal{A}_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin(\sphericalangle BAC)=6\cdot 10\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=$	**3p**
	$=6\cdot 10\cdot\dfrac{1}{2}=30$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(-1))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(-1)+0+1-(-1)-0-1=0$	**3p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{vmatrix}=(a+1)(a+2)$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=-2$ sau $a=-1$	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ și soluția sistemului este $\left(\dfrac{2a}{(a+1)(a+2)},\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)(a+2)},\dfrac{1}{a+1}\right)$	**2p**
	$\dfrac{4a}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{2a^2+3a+2}{(a+1)^2(a+2)}=0\Leftrightarrow 6a^2+7a+2=0$, deci $a=-\dfrac{2}{3}$ sau $a=-\dfrac{1}{2}$, care convin	**3p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{10}xy-x-y+10+10=$	**2p**
	$=\frac{1}{10}x(y-10)-(y-10)+10=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\frac{1}{10}(x-10)^2+10\le\frac{101}{10}\Leftrightarrow(x-10)^2\le 1$	**3p**
	$x\in[9,11]$	**2p**
c)	$x*10=10$ și $10*x=10$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\log_2 1*\log_2 2*\ldots*\log_2 2018=((\log_2 1*\ldots*\log_2 1023)*10)*\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018=$ $=10*(\log_2 1025*\ldots*\log_2 2018)=10$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6x+6-\frac{6}{x+1}=$	**3p**
	$=\frac{6x^3+6x^2-6x^2-6x+6x+6-6}{x+1}=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-1,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-1,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(0)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$ și, cum $f(0)=0$, valoarea minimă a funcției f este 0	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{x+1}=0$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{\lvert x\rvert}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=0$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\int_0^1(x^2+x+1)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\right\rvert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1-0=\frac{11}{6}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=(x^2+3x+2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(-2)=0$, $F''(-1)=0$, $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)$, $F''(x)<0$ pentru orice $x\in(-2,-1)$ și $F''(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci F are exact două puncte de inflexiune	**3p**
c)	$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F'(t)}{1}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{t\to 0}f(t)=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left\|1-\sqrt{2}\right\|=\sqrt{2}-1$, $\left\|2-\sqrt{2}\right\|=2-\sqrt{2}$	**2p**
	$n=\sqrt{2}-1+2-\sqrt{2}=1\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$11-x\geq 1-11x \Leftrightarrow 10x\geq -10$	**3p**
	$x\in[-1,+\infty)$	**2p**
3.	$(3\cdot 2)^x\cdot 2=72 \Leftrightarrow 6^x=36$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 5 moduri și, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor se poate alege în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, cifra unităților se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	$AB=4$, $BC=2$	**2p**
	ΔABC este dreptunghic în B, deci $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{2\cdot 4}{2}=4$	**3p**
6.	$A=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{2}$	**2p**
	$R=\dfrac{BC}{2}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&e^0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1&y-2+x-2&0\\0&1&0\\0&0&e^{x-2}\cdot e^{y-2}\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&x+y-4&0\\0&1&0\\0&0&e^{x+y-4}\end{pmatrix}=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(1+2+\ldots+10-2\cdot 9)=A\left(m^2+m+17\right)\Leftrightarrow m^2+m-20=0$	**3p**
	$m=-5$ sau $m=4$	**2p**
2.a)	$f(1)=a+2$	**2p**
	$f(-1)=a-10\Rightarrow f(1)-f(-1)=a+2-a+10=12$	**3p**

b)	Polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2 \Leftrightarrow f(2)=0$	**2p**
	$f(2)=a+2$, deci $a=-2$	**3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$	**2p**
	$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=6$, deci pătratele rădăcinilor sunt 1, 1 și 4; cum $x_1+x_2+x_3=4$, obținem rădăcinile 1, 1 și 2, deci $a=-2$, care convine	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=-\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a)=0$	**3p**
	$2-\ln a=0 \Leftrightarrow a=e^2$	**2p**
c)	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,e^2)$, deci f este strict crescătoare pe $(0,e^2)$	**2p**
	$0<2<3<e^2 \Rightarrow f(2)<f(3) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2<\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3 \Rightarrow \sqrt{3}\ln 2<\sqrt{2}\ln 3$, deci $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 (4x-x^2)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^3=$	**3p**
	$=18-9=9$	**2p**
b)	$\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx=\int_1^2 \frac{2-x}{4x-x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(4x-x^2)\Big\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 3=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	**2p**
c)	$I_{n+1}-4I_n=\int_0^4 f^{n+1}(x)dx-4\int_0^4 f^n(x)dx=\int_0^4 f^n(x)(4x-x^2-4)dx=-\int_0^4 f^n(x)(x-2)^2dx$	**3p**
	$f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,4] \Rightarrow f^n(x)(x-2)^2\geq 0$, deci $I_{n+1}-4I_n\leq 0 \Rightarrow I_{n+1}\leq 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=3 \Rightarrow b_3=9$	**3p**
	$b_1+b_2+b_3=1+3+9=13$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=7$	**2p**
	$-2m+21=1$, deci $m=10$	**3p**
3.	$(x-2)(x+2)=2^5 \Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$, care nu convine, $x=6$, care convine	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere	**3p**
5.	Punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=4$, $y_M=4$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot \sin\frac{2\pi}{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{12\cdot 3}{4}=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+1+(-1)-0-0-0=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&-a&-1\\1&1&a\end{vmatrix}=-a^3+a=$	**3p**
	$=a\left(1-a^2\right)=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	Pentru $a=0$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt de forma $(1+\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{R}$	**3p**
	Pentru orice α număr întreg, numerele $x_0=1+\alpha$, $y_0=1-\alpha$ și $z_0=\alpha$ sunt întregi	**2p**
2.a)	$x*2019=(x-2019)(2019-2019)+2019=$	**3p**
	$=0+2019=2019$, pentru orice număr real x	**2p**

b)	$x*x=(x-2019)^2+2019$, $(x*x)*x=(x-2019)^3+2019$	**2p**
	$(x-2019)^3+2019=x \Leftrightarrow (x-2019)\left((x-2019)^2-1\right)=0$, deci $x=2018$ sau $x=2019$ sau $x=2020$	**3p**
c)	$(m-2019)(n-2019)+2019=2020 \Leftrightarrow (m-2019)(n-2019)=1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $m=2018$, $n=2018$ sau $m=2020$, $n=2020$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}}{2x}-\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-\frac{1}{2}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=4$	**1p**
	$x\in(0,4]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(0,4]$ și $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	Cum $f(4)=2-\ln 4$, obținem $f(x)\ge 2-\ln 4$, deci $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+9)f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2}{x^2+9}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{18x}{(x^2+9)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui f	**2p**
	$F''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$x\in(-\infty,0)\Rightarrow F''(x)<0$ și $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)>0$, deci F are un singur punct de inflexiune	**2p**
c)	$x\in[0,1]\Rightarrow x^{2n}\ge 0$ și, cum $0\le f(x)\le 1$, obținem $0\le x^{2n}f(x)\le x^{2n}$	**2p**
	$0\le I_n=\int_0^1 x^{2n}f(x)dx\le\int_0^1 x^{2n}dx=\left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right\|_0^1=\frac{1}{2n+1}$ și $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n+1}=0$, deci $\lim_{n\to+\infty}I_n=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=3^2-\left(i\sqrt{2}\right)^2=$	**2p**
	$=9-2i^2=11\in\mathbb{Z}$	**3p**
2.	$f(a)=3\Rightarrow 2a+a=3$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$2019^x+2019^{-x}-2=0\Leftrightarrow\left(2019^x-1\right)^2=0$	**3p**
	$2019^x=1$, deci $x=0$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea numerelor naturale de două cifre care au cifra unităților impară are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d\left(x-x_A\right)$, deci $y=x-6$	**3p**
6.	$\sin(a-b)\sin(a+b)=\sin^2 a\cdot\cos^2 b-\sin^2 b\cdot\cos^2 a=$	**2p**
	$=\sin^2 a\left(1-\sin^2 b\right)-\sin^2 b\left(1-\sin^2 a\right)=\sin^2 a-\sin^2 b=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix} a & 0 & -a\\ 0 & 2 & 0\\ -a & 0 & a\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2a^2+0+0-2a^2-0-0=0$, pentru orice număr real a	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix} 2ab & 0 & -2ab\\ 0 & 4 & 0\\ -2ab & 0 & 2ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} ab & 0 & -ab\\ 0 & 2 & 0\\ -ab & 0 & ab\end{pmatrix}=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$B=2^{13}A\left(\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot\ldots\cdot\log_{15}16\right)=2^{13}A\left(\log_2 16\right)=$	**3p**
	$=2^{13}A(4)$, care are toate elementele numere întregi	**2p**

2.a)	$f(-1)=-m+n$, $f(0)=n$	**2p**
	$f(1)=2+m+n \Rightarrow f(-1)-2f(0)+f(1)=-m+n-2n+2+m+n=2$, pentru orice numere reale m și n	**3p**
b)	f este divizibil cu $X^2-1 \Leftrightarrow f(-1)=0$ și $f(1)=0$	**3p**
	$m=-1$, $n=-1$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$, $x_1x_2x_3=-n$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-1+3m-3n$	**3p**
	$3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=3(m-n)-(-1+3m-3n)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=$	**3p**
	$=\left(2x-x^2\right)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=2$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,2]$, deci f este crescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(0)=0<a$, $f(2)=4e^{-2}>a$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0<a$, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$	**3p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,0)$, pe $(0,2)$ și pe $(2,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale	**2p**
2.a)	$\int\limits_1^2 \left(f(x)-\ln x\right)dx=\int\limits_1^2 x^2\,dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=2x+\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\int\limits_1^e \|g(x)\|\,dx=\int\limits_1^e (2x+\ln x)\,dx=\left.x^2\right\|_1^e+\left.x\ln x\right\|_1^e-\int\limits_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx=$	**3p**
	$=e^2-1+e-0-(e-1)=e^2$	**2p**
c)	$\int\limits_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\int\limits_{e^{-1}}^1 x^n\ln x\,dx=\left.\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)\right\|_{e^{-1}}^1=\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}$	**3p**
	$\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{e^{-1}}^1 x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)e^{n+1}}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^2e^{n+1}}\right)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n \le 5 \Rightarrow A = \{0,1,2,3,4,5\}$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii A este $0+1+2+3+4+5=15$	**2p**
2.	$\Delta = 4-4m$	**2p**
	$\frac{4m-4}{4}=2$, de unde obținem $m=3$	**3p**
3.	$x+3=9-x \Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	O mulțime cu 10 elemente are $C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}$ submulțimi cu cel puțin 8 elemente	**3p**
	$C_{10}^{8}+C_{10}^{9}+C_{10}^{10}=45+10+1=56$	**2p**
5.	$D(2,2)$	**2p**
	$CD=10$	**3p**
6.	$\cos 2k\pi = 1$ și $\cos(2k+1)\pi=-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$	**2p**
	$1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi = 1+(-1)+1+(-1)+1+\ldots+(-1)+1+(-1)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}ab+a+b+1&0&0\\a+b+1&ab&a+b+1\\0&0&ab+a+b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab&0&0\\0&ab&0\\0&0&ab\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+b+1&0&0\\a+b+1&0&a+b+1\\0&0&a+b+1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=ab\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+(a+b+1)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(0)A(a)=(a+1)A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2020A(0)$, de unde obținem $n=2020$	**3p**
2.a)	$f(1)=6-2m$	**3p**
	$6-2m=0\Rightarrow m=3$	**2p**
b)	$f=X^3-3X^2+2X=X\left(X^2-3X+2\right)$	**2p**
	Rădăcinile sunt $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, deci $x_1^3+x_2^3+x_3^3=m^3-3m-9$	**3p**
	$m^3-3m-9=m^3-12$, de unde obținem $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-2\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)-\dfrac{x+1}{x}\cdot\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{2x-(x+1)}{x(x+1)^2}=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}\right)=1-0-0=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=\ln 2>0$, deci $f(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ și, cum $g(x)=h(x)\Leftrightarrow f(x)=0$, ecuația $g(x)=h(x)$ nu are soluție în $(0,+\infty)$, deci graficele funcțiilor g și h nu au niciun punct comun	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+4x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+4-0=\dfrac{13}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x\sqrt{x^2+4}\Rightarrow \mathcal{A}=\int_{-1}^1\|g(x)\|\,dx=-\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+4}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{x^2+4}\,dx=$	**2p**
	$=-\dfrac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_{-1}^0+\dfrac{1}{3}\left(x^2+4\right)^{\frac{3}{2}}\Big\|_0^1=-\dfrac{1}{3}\left(8-5\sqrt{5}\right)+\dfrac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-8\right)=\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$	**3p**
c)	Din teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3 f(x)}{4x^3}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{4}=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$3z_1-z_2=3(3-i)-(8-3i)=$	**2p**
	$=9-3i-8+3i=1$	**3p**
2.	$a-5+(a+1)-5=35$	**2p**
	$2a-9=35\Rightarrow a=22$	**3p**
3.	$4^x(2-4)+32=0\Leftrightarrow 4^x=16$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de o cifră care verifică relația sunt 6, 7, 8 și 9, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$, deci punctul C este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$m=4$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 24=\dfrac{6\cdot AC}{2}\Rightarrow AC=8$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&\ln 2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2+0+0-0-0-0=2$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}(a+1)(b+1)&0&0\\0&1&\ln((a+1)(b+1))\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}(ab+a+b)+1&0&0\\0&1&\ln((ab+a+b)+1)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(ab+a+b)$, pentru orice numere reale a și b, $a>0$, $b>0$	**2p**
c)	$A(a)A(a)=A\left((a+1)^2-1\right)$, $A(a)A(a)A(a)=A\left((a+1)^3-1\right)$, pentru a număr real, $a>0$	**2p**
	$(a+1)^3-1=7\Leftrightarrow (a+1)^3=8$, deci $a=1$	**3p**
2.a)	$f(-2)=6m-6$, pentru m număr real	**3p**
	$6m-6=0\Rightarrow m=1$	**2p**

b)	$f=X^3+X^2-X+2=(X+2)\left(X^2-X+1\right)$ $x_1=-2$, $x_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $x_3=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2x_3=-2$ $a=\dfrac{x_1^3+mx_1^2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_2^3+mx_2^2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{x_3^3+mx_3^2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{mx_1-2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{mx_2-2}{x_1x_2x_3}+\dfrac{mx_3-2}{x_1x_2x_3}=\dfrac{m(x_1+x_2+x_3)-6}{x_1x_2x_3}=$ $=\dfrac{m^2+6}{2}\geq 3$, deci $a\in[3,+\infty)$, pentru orice număr real m	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x\left(x^2+4x+1\right)+e^x(2x+4)=$ $=e^x\left(x^2+6x+5\right)=e^x(x+5)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în $(x_0,f(x_0))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(x_0)=0$ $e^{x_0}(x_0+5)(x_0+1)=0 \Leftrightarrow x_0=-5$ sau $x_0=-1$	**2p** **3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-5)=\dfrac{6}{e^5}$, $f(-1)=-\dfrac{2}{e}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ Cum f este continuă pe $\mathbb{R}$ și f este strict monotonă pe $(-\infty,-5)$, pe $(-5,-1)$ și pe $(-1,+\infty)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale $\Leftrightarrow a\in\left(0,\dfrac{6}{e^5}\right)$	**2p** **3p**
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$ $F'(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci F este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$	**2p** **3p**
b)	$\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{1}{x}f(x)dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln x}dx=\ln(\ln x)\Big\vert_e^{e^2}=$ $=\ln 2-\ln 1=\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$g(x)=\ln x \Rightarrow \mathcal{A}=\displaystyle\int_e^a\lvert g(x)\rvert dx=\int_e^a\ln x\,dx=x\ln x\Big\vert_e^a-\int_e^a x\cdot\frac{1}{x}dx=a\ln a-a$ $a\ln a-a=2a$ și, cum $a>e$, obținem $a=e^3$	**3p** **2p**