Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1 = 2$ și rația $r = 3$. Calculați a_3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2)=9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p **5.** Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr iraţional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+2x+2)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\log_2 7+\log_2 6-\log_2 21=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x)\geq g(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+12}=2x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.

5p **5.** Determinaţi numerele reale a şi b, pentru care $\vec{u}=3\vec{v}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+6\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$.

5p **6**. Se consideră expresia $E(x)=\sin^2 x-\cos^2 x+\sqrt{2}(\sin x+\cos x)-2$, unde x este număr real. Arătaţi că $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & x+3 \\ x-3 & x-2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(x))=5$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n astfel încât $A(-3)+A(-2)+A(-1)+A(1)+A(2)+A(3)=nA(0)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=\dfrac{x+y+1}{x^2+y^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $0*1=1$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că $x*(-x)\leq 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, ecuația $f(x)=a$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x+x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-xe^x\right)dx=\dfrac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2\dfrac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=\dfrac{e^4-e+3}{2}$.

5p **c)** Se consideră $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(1)=0$. Arătați că $\int_0^1 F(x)dx=\dfrac{5-3e}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, ştiind că $a_2=3$ și $a_3=5$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Determinaţi numărul natural n pentru care $f(n)=3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-1$.
5p	**4.** Determinaţi numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,1)$, $N(3,3)$, $P(4,3)$ și $Q(1,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care patrulaterul $MNPQ$ este trapez cu bazele MN și PQ.
5p	**6**. Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=5$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(A\cdot A)=a^2b^2$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**b)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=X\cdot A$. Demonstrați că, dacă a și b sunt numere reale distincte, atunci există numerele reale x și t astfel încât $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$.
5p	**c)** Pentru $a=4$ și $b=0$, determinați matricele $Y\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $Y\cdot Y=A$.
	2. Pe mulţimea $M=[0,+\infty)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=x\sqrt{y+1}+y\sqrt{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $3*3=12$.
5p	**b)** Demonstrați că $x*0=0*x=x$, pentru orice $x\in M$.
5p	**c)** Determinați $x\in M$ pentru care $(x^2+2x)*3=7$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este convexă.
5p	**c)** Se consideră funcția $g:(-1,0]\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^x$. Demonstrați că, dacă $x_1,x_2\in(-1,0]$ astfel încât $x_1\le x_2$, atunci $g(x_1)\ge g(x_2)$.
	2. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x^3$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{4}$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 x^2\left(f(x)\right)^3dx=\frac{1}{12}$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_0^1\left(f(x)\right)^{n+1}dx\le\int_0^1\left(f(x)\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n.