

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6, b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$ $b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	2p 3p
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$ $x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{43}{50}$	1p 2p 2p
5.	Punctul $M(-2, 3)$ este mijlocul laturii BC Ecuația medianei din A este $y = 3$	2p 3p
6.	$4 \sin^2 x + 4 \sin x \cos x + \cos^2 x - 4 \cos x \sin x + 4 \cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 4$ $\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \frac{\pi}{2}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$ $= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(2020 - x) + A(2020 + x) = \begin{pmatrix} 2020 - x & 3 \\ -3 & 2020 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020 + x & 3 \\ -3 & 2020 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 - n & 3 \\ -3 & 2 - n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$ $n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	3p 2p
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33 + 31} =$ $= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	3p 2p
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$ $(x\sqrt{3})^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	2p 3p

c)	$f(x+y) = \sqrt{-2020(x+y)} =$	2p
	$= \sqrt{-2020x + (-2020y)} = \sqrt{(f(x))^2 + (f(y))^2} = f(x) * f(y)$, pentru orice $x, y \in (-\infty, 0]$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 5) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2 + 5)^2} =$	3p
	$= \frac{5 + 4x - x^2}{(x^2 + 5)^2} = \frac{(5-x)(x+1)}{(x^2 + 5)^2}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}\right)} = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = 5$	1p
	$x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty, -1]$; $x \in [-1, 5] \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f e crescătoare pe $[-1, 5]$ și $x \in [5, +\infty) \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f e descrescătoare pe $[5, +\infty)$	2p
	Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(5) = \frac{1}{10}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, obținem $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{10}$, pentru orice număr real x	2p
2.a)	$F'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^3}\right)' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(1-3\ln x)}{x^6} =$	3p
	$= \frac{1-3\ln x}{x^4} = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	2p
b)	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = \frac{\ln x}{x^3} \Big _1^e =$	3p
	$= \frac{\ln e}{e^3} - \frac{\ln 1}{1^3} = \frac{1}{e^3}$	2p
c)	$\int_e^{e^2} x^2 F(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^2} =$	3p
	$= \frac{\ln^2 e^2 - \ln^2 e}{2} = \frac{2^2 - 1^2}{2} = \frac{3}{2}$	2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$ $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 = 6$	2p 3p
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$ $a = 2$	3p 2p
3.	$x^2 - 5x + 7 = (x-1)^2$ $3x = 6$, deci $x = 2$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{m}{3} = \frac{5}{3}$ $m = 5$	3p 2p
6.	$(\sin x - \cos x)^2 + (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) =$ $= -12 + 12 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = (I_2 + xA)(I_2 + yA) = I_2 + xA + yA + xyAA$ Cum $AA = A$, obținem $M(x)M(y) = I_2 + (x + y + xy)A = M(x + y + xy)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$M(m + n + mn) = M(6) \Leftrightarrow m + n + mn = 6$ $(m+1)(n+1) = 7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = xy - x - y + 1 + 1 =$ $= x(y-1) - (y-1) + 1 = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
b)	$x \circ x = (x-1)^2 + 1$, de unde obținem $(x-1)^2 \leq 4$ $x \in [-1, 3]$	2p 3p
c)	$1 \circ x = 1$, unde x este număr real $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n = 1 \circ (2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2020^n) = 1$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - e(\ln x)' =$ $= 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = 1$</p> $\frac{a - e}{a} = 1 \Leftrightarrow a - e = a \Leftrightarrow e = 0, \text{ ceea ce este imposibil, deci graficul funcției } f \text{ nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație } y = x$	3p 2p
c)	<p>$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, e) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, e)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (e, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e, +\infty)$</p> $e^x - x^e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ și, cum } f(e) = 0, \text{ ecuația } e^x - x^e = 0 \text{ are exact o soluție în } (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^3 x(x+2) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right) \Big _0^3 =$ $= 9 + 9 - 0 = 18$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x) e^x dx = (x^2 + 2x) e^x \Big _0^1 - \int_0^1 (2x + 2) e^x dx =$ $= 3e - (2x + 2) e^x \Big _0^1 + \int_0^1 2e^x dx = 3e - 4e + 2 + 2e - 2 = e$	2p 3p
c)	$\int_1^n \frac{(x+1)e^x}{f(x)} dx = \int_1^n \frac{x+1}{x^2 + 2x} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x) \Big _1^n = \frac{1}{2} \ln \frac{n^2 + 2n}{3}$ $\frac{1}{2} \ln \frac{n^2 + 2n}{3} = \frac{3 \ln 2}{2} \Rightarrow n^2 + 2n - 24 = 0 \text{ și, cum } n \text{ este număr natural nenul, obținem } n = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $b_3 = 1 \cdot 2^2 = 4$	3p 2p
2.	$3x + 1 < 7 \Leftrightarrow x < 2$ Cum x este număr natural, obținem $x = 0$ sau $x = 1$	2p 3p
3.	$x^2 + 8 = (x + 2)^2$ $x = 1$, care convine	2p 3p
4.	$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} =$ $= 6$	3p 2p
5.	$m_{AB} = 1$, $m_{CD} = 1 - a$, unde a este număr real $m_{AB} = m_{CD} \Leftrightarrow 1 - a = 1 \Leftrightarrow a = 0$	2p 3p
6.	$\cos B = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{10}{BC}$ $BC = 20$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 =$ $= 6 - 2 = 4$	3p 2p
b)	$A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy \\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1+(x+y+3xy) & x+y+3xy \\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy) \end{pmatrix} = A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	2p 3p
c)	$A(a+a+3a \cdot a) = A(5) \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 5 = 0$ $a = -\frac{5}{3}$ sau $a = 1$	3p 2p
2.a)	$x * y = -xy + 5x + 5y - 25 + 5 =$ $= -x(y-5) + 5(y-5) + 5 = -(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$-(x-5)^2 + 5 \geq x \Leftrightarrow (x-5)(x-4) \leq 0$ $x \in [4, 5]$	3p 2p
c)	$x * 5 = x$ și $5 * y = y$, unde x și y sunt numere reale $1 * (-2) * 3 * (-4) * 5 * \dots * 2019 * (-2020) = ((1 * (-2) * 3 * (-4)) * 5) * (-6) * \dots * 2019 * (-2020) =$ $= 5 * ((-6) * \dots * 2019 * (-2020)) = 5$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2(x+2)e^{-x} + (x+2)^2 e^{-x} \cdot (-1) =$ $= (-x^2 - 2x)e^{-x} = -x(x+2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$	3p
		2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)^2 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(x+2)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ <p>Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f</p>	3p
		2p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-2, 0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2, 0]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = 4$, obținem $f(x) \leq 4$, pentru orice $x \in [-2, +\infty)$ $x, y \in [-2, +\infty) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4$ și $0 \leq f(y) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(x)f(y) \leq 16 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{f(x)f(y)} \leq 4$, de unde obținem $0 \leq \frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}} \leq 4$, pentru orice $x, y \in [-2, +\infty)$	3p
		2p
2.a)	$\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x) dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$	3p
		2p
b)	$\int_1^2 \frac{1}{x^2} f(x) dx = \int_1^2 x e^x dx = (x-1)e^x \Big _1^2 =$ $= e^2$	3p
		2p
c)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , deci $F'(x) = f(x) \Rightarrow F''(x) = x^2(x+3)e^x, x \in \mathbb{R}$ $F''(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -3)$, $F''(x) > 0$, pentru orice $x \in (-3, 0)$ și pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	2p
		3p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_6^2 = b_5 b_7 \Rightarrow 36 = 3b_7$ $b_7 = 12$	3p 2p
2.	$a^2 - 20 = a \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$ $a = -4$ sau $a = 5$	3p 2p
3.	$5^x = 5^{-3x} \Leftrightarrow x = -3x \Leftrightarrow 4x = 0$ $x = 0$	3p 2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5 \cdot 3 = 15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	2p 3p
5.	$AO = BO = CO$ și $O \in AC$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic în B Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x = 0$, $y = 1$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 =$ $= 1 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$M(x)M(y) = AA + yAB + xBA + xyBB$, $M(y)M(x) = AA + xAB + yBA + yxBB$ Cum $AB = A$ și $BA = B$, obținem $yA + xB = xA + yB \Leftrightarrow (x - y)A = (x - y)B \Leftrightarrow x = y$	2p 3p
c)	$m^2 + 1 = n^2 \Leftrightarrow (n - m)(n + m) = 1$ Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m, n) = (0, -1)$ sau $(m, n) = (0, 1)$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = 7xy + x + y + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} =$ $= 7x\left(y + \frac{1}{7}\right) + \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7} = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$ sau $x + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$ $x = -1$ sau $x = \frac{5}{7}$	3p 2p

c)	De exemplu, $a = \frac{1}{7}$ și $b = \frac{3}{7}$	2p
	$a \circ b = 7 \left(a + \frac{1}{7} \right) \left(b + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{7} = 7 \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = 1 \in \mathbb{N}$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x - 2(x-1)}{x^2} =$ $= \frac{x - 2x + 2x - 2}{x^2} = \frac{x - 2}{x^2}, x \in (0, +\infty)$	3p
		2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -x \Leftrightarrow f'(a) = -1$ $\frac{a-2}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$, care nu convine sau $a = 1$, care convine	3p
		2p
c)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ $0 < 1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$ și, cum $f(1) = 0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$	2p
		3p
2.a)	$\int_1^e f'(x) dx = f(x) \Big _1^e = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	3p
		2p
b)	$\int_1^e \frac{f^2(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln^2 x dx = \frac{\ln^3 x}{3} \Big _1^e =$ $= \frac{1}{3}$	3p
		2p
c)	$\int_1^p x f(x) dx = \int_1^p x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^p - \int_1^p \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{p^2}{2} \ln p - \frac{p^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{p^2}{2} \ln p - \frac{3}{4}$ și, cum $p > 1$, obținem $p = 2$	3p
		2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(0,2 \cdot 10 - 1)(0,2 \cdot 10 + 1) = (2 - 1)(2 + 1) =$ $= 1 \cdot 3 = 3$	3p 2p
2.	$x^2 - 2 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ sau $x = 2$	3p 2p
3.	$4(6 - x) = x + 14 \Rightarrow 24 - 4x = x + 14 \Leftrightarrow 5x = 10$ $x = 2$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	1p 2p 2p
5.	$\vec{u} + \vec{v} = (a + 2)\vec{i} + (a + 2)\vec{j}$ $a = -2$	3p 2p
6.	Cum $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$ $\text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$	3p 2p
b)	$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y - z = 4 \\ -3x - y + z = 1 \end{cases}$ și $\det(A(-1)) = -1 \neq 0$, deci sistemul de ecuații admite soluție unică $x = -5$, $y = -6$, $z = -20$	2p 3p
c)	$A(p) = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 \\ 2 & 1 & p \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(p)) = -3p^2 - p + 1$, unde p este număr rațional $-3p^2 - p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$ sau $p = -\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \notin \mathbb{Q}$, deci, pentru orice număr rațional p , $\det(A(p)) \neq 0$, adică matricea $A(p)$ este inversabilă	2p 3p
2.a)	$x * y = xy - 101x - 101y + 10201 + 101 = x(y - 101) - 101(y - 101) + 101 =$ $= (x - 101)(y - 101) + 101$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p

b)	Elementul neutru al legii „*” este $e = 102$ $x = x' \Leftrightarrow x * x = 102 \Leftrightarrow (x - 101)^2 = 1$, de unde obținem $x = 100$ sau $x = 102$	2p 3p
c)	$x * y = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) + 101 = 202 \Leftrightarrow (x - 101)(y - 101) = 101$ Cum x și y sunt numere întregi cu $x < y$ și 101 este număr prim, obținem $x = 0$ și $y = 100$ sau $x = 102$ și $y = 202$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$ Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0) = e^0 - 1 = 0$	3p 2p
b)	$f''(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$ $f''(x) > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția f este convexă pe \mathbb{R}	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -4$, obținem $f(x) \geq -4$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) \geq -4$, deci $e^{-x} \geq -x + 1$, de unde $e^x(1 - x) \leq 1$, pentru orice număr real x	1p 2p 2p
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2 + 4}{x} - \frac{4}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$ $= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	3p 2p
b)	$\int_2^6 \frac{2}{f(x)} dx = \int_2^6 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = \ln(x^2 + 4) \Big _2^6 =$ $= \ln 40 - \ln 8 = \ln 5$	3p 2p
c)	$\int_1^e \left(f(x) - \frac{4}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4} \Big _1^e = \frac{e^2 + 1}{4}$ $\frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{a}$, deci $a = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{(2a_1 + 4r) \cdot 5}{2} = \frac{(2 \cdot 5 + 4 \cdot 2) \cdot 5}{2} =$ $= 45$	3p 2p
2.	$\Delta = a^2 - 4(a-1) = (a-2)^2$ $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	2p 3p
3.	$\sqrt[3]{x^2 + x + 2} = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$ $x = -3$ sau $x = 2$	3p 2p
4.	$2C_4^3 - 3A_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{3!(4-3)!} - 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} =$ $= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 \cdot 3 = 8 - 36 = -28$	2p 3p
5.	$\frac{1}{2} = \frac{a}{a^2 + 1} \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$ $a = 1$	3p 2p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} \Leftrightarrow 16 = \frac{8 \cdot 8 \cdot \sin B}{2}$ $\sin B = \frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de 30°	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 =$ $= 0 - 1 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $M(x, y) \cdot M(a, b) = (xI_2 + yA)(aI_2 + bA) = xaI_2 + xbA + yaA + ybA \cdot A = (xa + yb)I_2 + (xb + ya)A =$ $= M(xa + yb, xb + ya)$ pentru orice numere reale a, b, x și y	2p 3p
c)	$\det(M(x, y)) = \begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2 - y^2$, pentru orice numere reale x și y , deci $(x - y)(x + y) = 4$ $M(x, y) \cdot M(x, y) = M(x^2 + y^2, 2xy) \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + 2xy) = 8$, deci $(x + y)^2 = 4$ $x + y = x - y = -2$ sau $x + y = x - y = 2$, deci perechile sunt $(-2, 0)$ sau $(2, 0)$	1p 2p 2p
2.a)	$2 \circ (1 * 3) = 2 \circ (1 + 3 - 1) = 2 \circ 3 = 2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2 = 3$ $(2 \circ 1) * (2 \circ 3) = (2 \cdot 1 - 2 - 1 + 2) * (2 \cdot 3 - 2 - 3 + 2) = 1 * 3 = 1 + 3 - 1 = 3 = 2 \circ (1 * 3)$	2p 3p
b)	$x \circ x = x^2 - 2x + 2$ și $x * x = 2x - 1$, pentru orice număr real x $3^{x \circ x} = (3^{-2})^{x * x} \Leftrightarrow x \circ x = -2 \cdot (x * x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0$, deci $x = -2$ sau $x = 0$	2p 3p

c)	$(x-1) \cdot (2y+1) = 2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y) \circ 4 = 10 \Leftrightarrow x+y=4$ Obținem $x=5$, $y=-1$	3p 2p
----	---	----------

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (5x-3) = 2$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - x + \sqrt{x^2 + 3}) = 2$ și $f(1) = 2$, deci $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$ Cum f este continuă pe $(-\infty, 1)$ și pe $(1, +\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}	3p 2p
b)	$f'(x) = 2x - 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a) > 0$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$, obținem că $f'(a) \neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A nu este paralelă cu axa Ox , pentru orice $a \in (1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = 2 + \frac{3}{(x^2 + 3)\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in (1, +\infty)$ $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 =$ $= \frac{\sqrt{x} + 2x}{2x} = g(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	3p 2p
b)	$\int_1^4 g(x) dx = f(x) \Big _1^4 = f(4) - f(1) =$ $= 7 - 3 = 4$	3p 2p
c)	$\int_1^m f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^m f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{1}{2} f^2(x) \Big _1^m = \frac{1}{2} (f^2(m) - f^2(1))$ $f^2(m) - 9 = 40 \Leftrightarrow f(m) = -7$, care nu convine sau $f(m) = 7$, de unde obținem $m = 4$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ este $q = 2$ $S_5 = \frac{b_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$	2p 3p
2.	$f(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 11x + 6 < 0$ $\Delta = 49$, deci $x \in \left(\frac{2}{3}, 3\right)$	2p 3p
3.	$\lg \frac{1-x}{7-x} = -1 \Rightarrow \frac{1-x}{7-x} = \frac{1}{10}$ $x = \frac{1}{3}$, care convine	3p 2p
4.	$n + \frac{n(n-1)}{2} = 6 \Leftrightarrow n^2 + n - 12 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 3$	3p 2p
5.	$A(2a-1, a^2) \in d \Leftrightarrow a^2 = 2a - 1 + 4$ $a^2 - 2a - 3 = 0$, deci $a = -1$ sau $a = 3$	2p 3p
6.	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \cdot \left(\frac{12}{13}\right)^2 =$ $= 1 - 2 \cdot \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -2 + (-2) + 1 - 4 - 1 - 1 = -9$	2p 3p
b)	$B(a) = A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 2-2a & -3 & -3 \\ a-1 & 6 & -3 \\ 2a+1 & a-1 & -2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a	3p 2p
c)	Pentru $a = -2$, sistemul devine $\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - 2y + z = 2 \\ -2x + y + z = 3 \end{cases}$ Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x + y - 2z) + (x - 2y + z) + (-2x + y + z) = 1 + 2 + 3$, obținem $0 = 6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil	2p 3p

2.a)	$(-1) * 1 = (-1) \cdot 1 + m((-1) + 1) =$ $= -1 + m \cdot 0 = -1$, pentru orice număr real m	3p 2p
b)	$x * y = xy + mx + my + m^2 - m^2 =$ $= x(y + m) + m(y + m) - m^2 = (x + m)(y + m) - m^2$, pentru orice numere reale x, y și m	2p 3p
c)	$(5^x - 1)(5^{x+1} - 1) - 1 = -1 \Leftrightarrow 5^x - 1 = 0$ sau $5^{x+1} - 1 = 0$ $x = 0$ sau $x = -1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 \left(x^{-\frac{1}{2}} \right)' + \frac{1}{x^2} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^2} =$ $= -\frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p 2p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{x^2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} =$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x^2(\sqrt{x}+1)} = -\frac{1}{2}$	3p 2p
2.a)	$F'(x) = \frac{1}{x} + e^x + 4$, $x \in (0, +\infty)$ F este primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci $m = 4$	3p 2p
b)	$\int_1^e f(x) dx = F(x) \Big _1^e = F(e) - F(1) =$ $= e^e + 3e - 3$	3p 2p
c)	$\int_1^2 x f(x) dx = \int_1^2 x \left(\frac{1}{x} + e^x \right) dx = \int_1^2 (1 + xe^x) dx = \left(x + (x-1)e^x \right) \Big _1^2 =$ $= 2 + e^2 - 1 = e^2 + 1$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\log_2 63 - \log_2 7) \cdot \frac{1}{\log_2 3} = \log_2 \frac{63}{7} \cdot \frac{1}{\log_2 3} =$	2p
	$= \log_2 3^2 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2 \log_2 3 \cdot \frac{1}{\log_2 3} = 2$	3p
2.	$\Delta = m^2 + 4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2 + 4m < 0$	3p
	$m \in (-4, 0)$	2p
3.	$3^{x^2-20} = 3^{-4} \Leftrightarrow x^2 = 16$	3p
	$x = -4$ sau $x = 4$	2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	2p
	$n! \leq n(n-1) \Rightarrow n = 2$ sau $n = 3$, deci sunt 2 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$	1p
5.	$\vec{AB} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$ și $\vec{OC} = a\vec{i} + b\vec{j}$, unde $C(a, b)$, deci $a\vec{i} + b\vec{j} = 4\vec{i} + 4\vec{j}$	3p
	$a = 4$, $b = 4$	2p
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1 > a-1$ și $2a+1 > 2a \Rightarrow (2a+1)^2 = (2a)^2 + (a-1)^2$, deci	2p
	$a^2 - 6a = 0$	
	Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 6$	3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(e)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= e + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = e$	3p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\ln a \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(a) \cdot A(a)) = a^2$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	3p
	$\det(A(a^2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ln a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 = \det(A(a) \cdot A(a))$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$	2p

c)	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & ab & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } a,b\in(0,+\infty)$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \ln(ab) \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2\ln(ab) \\ 0 & 2ab & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow ab=1 \text{ și } a+b=2, \text{ de unde obținem } a=1 \text{ și } b=1$	3p 2p
2.a)	$\sqrt{2}\circ 1=3\cdot\sqrt{2}\cdot 1-3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+6+\sqrt{2}=$ $=3\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=\sqrt{2}$	2p 3p
b)	$x\circ y=3xy-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+6+\sqrt{2}=$ $=3x(y-\sqrt{2})-3\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}=3(x-\sqrt{2})(y-\sqrt{2})+\sqrt{2}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
c)	$x\circ\sqrt{2}=\sqrt{2}, \sqrt{2}\circ y=\sqrt{2}, \text{ unde } x \text{ și } y \text{ sunt numere reale}$ $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\circ\sqrt{2}\right)\circ\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2}\circ\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\dots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}\right)=\sqrt{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x<1}} f(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x<1}} (2^x+3^x-4)=1, \quad \lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x>1}} f(x)=\lim_{\substack{x\rightarrow 1 \\ x>1}} \frac{x^2-x+1}{x^2}=1 \quad \text{și} \quad f(1)=1, \quad \text{deci}$ $\lim_{x\rightarrow 1} f(x)=f(1), \text{ de unde obținem că } f \text{ este continuă în } x=1$ <p>Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe \mathbb{R}</p>	3p 2p
b)	$x\in(-\infty,1)\Rightarrow f(x)=2^x+3^x-4, \text{ deci } f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$ $f'(x)>0, \text{ pentru orice } x\in(-\infty,1), \text{ deci funcția } f \text{ este crescătoare pe } (-\infty,1)$	3p 2p
c)	$f \text{ este crescătoare pe } (-\infty,1) \text{ și continuă în } x=1, \text{ deci } f(x)\leq f(1) \text{ și, cum } f(1)=1, \text{ obținem } f(x)\leq 1, \text{ pentru orice } x\in(-\infty,1)$ $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^3}, \text{ deci } f'(x)<0, \text{ pentru orice } x\in(1,2) \text{ și } f'(x)>0, \text{ pentru}$ $\text{orice } x\in(2,+\infty) \text{ și, cum } f \text{ este continuă, } f(1)=1 \text{ și } \lim_{x\rightarrow+\infty} f(x)=1, \text{ obținem } f(x)\leq 1,$ $\text{pentru orice } x\in[1,+\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 (x+1)(x+3)f(x)dx=\int_0^1 (2x+4)dx=\left(x^2+4x\right)\Big _0^1=$ $=1+4-0=5$	3p 2p
b)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 \frac{2x+4}{x^2+4x+3}dx=\ln(x^2+4x+3)\Big _0^2=$ $=\ln 15-\ln 3=\ln 5$	2p 3p
c)	$F'(x)=f(x), x\in(-1,+\infty), \text{ deci } F''(x)=\frac{-2(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+3)^2}, x\in(-1,+\infty)$ $F''(x)<0, \text{ pentru orice } x\in(-1,+\infty), \text{ deci orice primitivă } F \text{ a funcției } f \text{ este concavă}$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	2p 3p
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$, unde a este număr real Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$, deci $a = 0$ sau $a = 4$	2p 3p
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$ $x = 1$ sau $x = 3$	3p 2p
4.	$C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$ $12 = \frac{4+20}{2}$, deci C_4^1 , A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$, unde a este număr real A , B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$, deci $a = 5$	2p 3p
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$ $2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	2p 3p
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2 + 3)$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R}^*$	2p 3p
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$, atunci $\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1, \text{ unde } a \text{ este număr} \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$ real Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$, ceea ce este imposibil	2p 3p
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$ $= \sqrt[3]{8} = 2$	3p 2p
b)	$x * e = x$, pentru orice număr real x , deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$ Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x , obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p

c)	$f(x * y) = (x * y)^3 + 8 = \left(\sqrt[3]{x^3 + y^3 + 8}\right)^3 + 8 = x^3 + y^3 + 8 + 8 =$	2p
	$= x^3 + 8 + y^3 + 8 = f(x) + f(y)$, pentru orice numere reale x și y , deci f este morfism de la grupul $(\mathbb{R}, *)$ la grupul $(\mathbb{R}, +)$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+2} + \frac{x}{x+4} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{x}} + \frac{1}{1+\frac{4}{x}} \right) =$	3p
	$= 1 + 1 = 2$	2p
b)	$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$	3p
	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-2, +\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2, +\infty)$	2p
c)	f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1, +\infty)$, $f(-1) = \frac{4}{3}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, deci	3p
	$f(x) \in \left(0, \frac{4}{3}\right]$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$ $f(x) \in \mathbb{Z}$, deci $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0$ și, cum $x \in [-1, +\infty)$, obținem $x = -2 + \sqrt{2}$	2p
2.a)	$\int_0^2 \frac{x+1}{f(x)} dx = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big _0^2 =$	3p
	$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$	2p
b)	$\int_0^1 e^{3x} f^2(x) dx = \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx = (x^2 + 1)e^x \Big _0^1 =$	3p
	$= 2e - e^0 = 2e - 1$	2p
c)	$\frac{f(x)}{x+1} = e^{-x}$, $x \in (0, +\infty) \Rightarrow 1 - \int_0^a \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-a}$, $1 - \int_0^b \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-b}$, $1 - \int_0^c \frac{f(x)}{x+1} dx = e^{-c}$	3p
	e^{-a} , e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow (e^{-b})^2 = e^{-a} \cdot e^{-c}$, deci $e^{-2b} = e^{-a-c}$, de unde obținem $2b = a + c$, adică a , b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$3^2 = (a-1)(a+7) \Leftrightarrow a^2 + 6a - 16 = 0$ Cum a este număr real, $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 6 = -x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 = 0$ Cum $\Delta > 0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	3p 2p
3.	$3^x(3^2 - 1) = 8 \Leftrightarrow 3^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile $\frac{n(n-1)}{2} \leq 3n \Leftrightarrow n(n-7) \leq 0$ și, cum $n \in A$, obținem $n \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{4}{m-2} = \frac{m}{2} \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$ $m = -2$ sau $m = 4$, care convin	2p 3p
6.	$\cos A = \frac{1}{2}$ și $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$, deci $BC = \sqrt{21}$ $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 9 + \sqrt{21}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\begin{cases} -(m^2 - 1) + 4 = 1 \\ -1 + 1 = 0 \\ -m + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4 \\ m = 2 \end{cases}$ $m = 2$	3p 2p
b)	Matricea sistemului de ecuații este $A = \begin{pmatrix} m^2 - 1 & m & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\det A = -(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A \neq 0$, deci $m \in \mathbb{R} \setminus \{-7, 2\}$	3p 2p
c)	$m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\} \Rightarrow \det A \neq 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7}, -\frac{m+3}{m+7}, \frac{m+2}{m+7}\right)$ Cum $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-7, 2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m = -8$ sau $m = -6$	3p 2p

2.a)	$x \circ y = 11xy + x + y + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} = 11x\left(y + \frac{1}{11}\right) + \left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} =$ $= \left(y + \frac{1}{11}\right)(11x + 1) - \frac{1}{11} = 11\left(x + \frac{1}{11}\right)\left(y + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	3p 2p
b)	$11\left(x + \frac{1}{11}\right)^2 - \frac{1}{11} = \frac{8}{11} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$ $x = -\frac{4}{11} \text{ sau } x = \frac{2}{11}$	3p 2p
c)	$a = 11^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{11} + \frac{1}{11}\right) \cdot \left(1 - \frac{4}{11} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{11} = 11^3 \cdot 1 \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{11} - \frac{1}{11} = 720 - \frac{1}{11}$ $719 < 720 - \frac{1}{11} < 720, \text{ deci partea întregă a numărului } a \text{ este egală cu } 719$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - x\right)' =$ $= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 = \sqrt{x} - 1, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(1) = 0, f(1) = -\frac{1}{3}$ <p>Ecuția tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$, adică $y = -\frac{1}{3}$</p>	2p 3p
c)	$f'(1) = 0, f'(x) \leq 0, \text{ pentru orice } x \in (0, 1] \Rightarrow f \text{ este descrescătoare pe } (0, 1] \text{ și } f'(x) \geq 0,$ <p>pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1, +\infty)$</p> <p>Pentru orice $x \in (0, +\infty), f(x) \geq f(1) \Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x \geq -\frac{1}{3}$, de unde obținem $x(2\sqrt{x} - 3) \geq -1$</p>	2p 3p
2.a)	$g(x) = x^3, x \in (-1, +\infty), \text{ deci } G(x) = \frac{x^4}{4} + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$ <p>Cum $G(0) = 2020$, obținem $c = 2020$, deci $G(x) = \frac{x^4}{4} + 2020$</p>	3p 2p
b)	$\int_0^1 f_1(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = (x - \ln(x+1)) \Big _0^1 =$ $= 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$f_n(x) = \frac{x^n}{x^n + 1} \leq x^n, \text{ pentru orice număr natural nenul } n \text{ și orice } x \in [0, 1]$ $\int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 x^n dx \text{ și, cum } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, \text{ obținem } \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice număr}$ <p>natural nenul n</p>	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) + \log_2(\sqrt[3]{2} - 1) = 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\right) = 0$ Cum $\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right) = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3 - 1 = 1$, obținem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\right) = 0$	3p 2p
2.	$f(x) + f(-x) = 2020 \Leftrightarrow 2x + a + 2 \cdot (-x) + a = 2020$ $2a = 2020$, deci $a = 1010$	3p 2p
3.	$3^x + \frac{3}{3^x} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 3) = 0$ $x = 0$ sau $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p 2p 1p
5.	$\overline{AB} + 2\overline{BD} + 3\overline{DA} = (\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{DA}) + \overline{BD} + 2\overline{DA} = \vec{0} + \overline{BD} + \overline{DA} + \overline{DA} = \overline{BA} + \overline{DA} =$ $= -(\overline{AB} + \overline{AD}) = -\overline{AC} = \overline{CA}$	3p 2p
6.	Considerăm $\triangle ABC$ cu $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 4 \Rightarrow \cos A = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4}$ $\cos A < 0$, deci unghiul A este obtuz	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 13 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-4) - 13 \cdot (-1) = 1$ $\det(A + I_2) = \begin{vmatrix} 4 & 13 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-3) - 13 \cdot (-1) = 1$, deci $\det(A + I_2) = \det A$	2p 3p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ $aI_2 = I_2$, deci $a = 1$	3p 2p
c)	$\det(A + mI_2) = \begin{vmatrix} 3+m & 13 \\ -1 & -4+m \end{vmatrix} = m^2 - m + 1$, pentru orice număr natural m $m^2 - m + 1 = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (m - n)(m + n - 1) = 0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m \neq n$, obținem $m + n = 1$, deci perechile sunt $(1, 0)$ și $(0, 1)$	3p 2p

2.a)	$x \circ \frac{1}{2} = \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{1 - x - \frac{1}{2} + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} =$ $= \frac{x \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = x, \text{ pentru orice } x \in M$	2p 3p
b)	$x \circ y = \frac{xy}{1 - x - y + 2xy} = \frac{yx}{1 - y - x + 2yx} =$ $= y \circ x, \text{ pentru orice } x, y \in (0,1), \text{ deci legea de compoziție „} \circ \text{” este comutativă}$	2p 3p
c)	$f(x) \circ f(y) = \frac{f(x)f(y)}{1 - f(x) - f(y) + 2f(x)f(y)} = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot \frac{y}{y+1}}{1 - \frac{x}{x+1} - \frac{y}{y+1} + 2 \cdot \frac{xy}{(x+1)(y+1)}} =$ $= \frac{xy}{xy + x + y + 1 - xy - x - yx - y + 2xy} = \frac{xy}{xy + 1} = f(xy), \text{ pentru orice } x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(e^x + 1)e^x - (e^x + x)e^x}{e^{2x}} =$ $= \frac{(e^x + 1 - e^x - x)e^x}{e^{2x}} = \frac{1 - x}{e^x}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	<p>Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ are panta $f'(1) = 0$</p> <p>Cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1, f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele</p>	2p 3p
c)	$f'(x) = (1 - x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = (x - 2)e^{-x}, \text{ deci } g(x) = (x - 2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = (3 - x)e^{-x}, x \in \mathbb{R}, \text{ deci } g'(x) + g(x) = (3 - x)e^{-x} + (x - 2)e^{-x} = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \text{ pentru}$ <p>orice număr real x</p>	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 1)f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 1) \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \int_0^1 (4x^3 + 2x + 1) dx =$ $= (x^4 + x^2 + x) \Big _0^1 = 1 + 1 + 1 - 0 = 3$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(4x - \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \left(2x^2 - \ln(x^2 + 1) + \arctg x \right) \Big _0^1 =$ $= 2 - \ln 2 + \arctg 1 - 0 + \ln 1 - \arctg 0 = 2 - \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	3p 2p
c)	$\int_1^e \left(f(x) + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \right) \ln x dx = \int_1^e 4x \ln x dx = 2x^2 \ln x \Big _1^e - \int_1^e 2x dx = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1$ $e^2 + 1 = e^2 + a, \text{ deci } a = 1$	2p 3p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2$, deci $a_1 + 2a_2 + a_3 = 4a_2$ $a_2 = 1$	3p 2p
2.	$f(3) = 3^2 + 3 + 6 = 18$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 6 = \frac{58}{9}$ $f(3) \cdot f\left(\frac{1}{3}\right) = 18 \cdot \frac{58}{9} = 116$, care este număr natural	2p 3p
3.	$\log_5((4-x)(24-x)) = 3 \Rightarrow (4-x)(24-x) = 125 \Rightarrow x^2 - 28x - 29 = 0$ $x = -1$, care convine, sau $x = 29$, care nu convine	3p 2p
4.	Mulțimea are $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu două elemente, unde n este numărul de elemente ale mulțimii, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, deci $\frac{n(n-1)}{2} = 45$, de unde obținem $n^2 - n - 90 = 0$ Cum n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $n = 10$	3p 2p
5.	$\vec{u} - \vec{v} = (a-1)\vec{i} + 4\vec{j}$, $3\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ Vectorii $\vec{u} - \vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari, deci $\frac{a-1}{3} = -\frac{4}{3}$, de unde obținem $a = -3$	2p 3p
6.	Triunghiul are ipotenuza egală cu 10 și aria $S = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ $r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} =$ $= 5 \cdot (-4) - 10 \cdot (-2) = 0$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\begin{pmatrix} 5-10a+a^2 & 10-20a \\ -2+4a & -4+8a+a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
c)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = 2 \neq 0$, deci $A(-1)$ este inversabilă și $(A(-1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $X = (A(-1))^{-1} \cdot A(0)$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$5 * 8 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 8 + 1 =$ $= 15 - 16 + 1 = 0$	3p 2p
b)	$3 \cdot 2020^x - 2 \cdot 2020^x + 1 = 2 \Leftrightarrow 2020^x = 1$ $x = 0$	2p 3p
c)	De exemplu, pentru $m = 2k - 1$ și $n = 3k - 1$, unde $k \in \mathbb{Z}$, obținem $m * n = (2k - 1) * (3k - 1) =$ $= 3(2k - 1) - 2(3k - 1) + 1 = 6k - 3 - 6k + 2 + 1 = 0$, deci există o infinitate de perechi (m, n) de numere întregi pentru care $m * n = 0$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) =$ $= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ are panta $f'(a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ Tangenta la graficul funcției f în punctul $B(-a, f(-a))$ are panta $f'(-a) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ și, cum, pentru orice număr real nenul a , $f'(-a) = f'(a)$, obținem că tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a, f(a))$ și $B(-a, f(-a))$ sunt paralele	2p 3p
c)	$f(x) - f(-x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 2 \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = 2f(x)$, pentru orice număr real x $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x)}{\ln x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{(\ln x)'} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2$	3p 2p
2.a)	$\int_0^1 (x + 2 \ln(2x + 1) - 2 \ln(2x + 1)) dx = \int_0^1 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^1 = \frac{1}{2}$	2p 3p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + 2 \ln(2x + 1)) dx = \frac{x^2}{2} \Big _0^1 + \int_0^1 (2x + 1)' \ln(2x + 1) dx =$ $= \frac{1}{2} + (2x + 1) \ln(2x + 1) \Big _0^1 - \int_0^1 2 dx = \frac{1}{2} + 3 \ln 3 - 2 = 3 \ln 3 - \frac{3}{2}$	3p 2p
c)	$F'(x) = f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe $[0, +\infty)$ Cum $\pi < 3,2 = \frac{16}{5}$, obținem $F(\pi) \leq F\left(\frac{16}{5}\right)$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$ z = \frac{ 1+2i }{ 1-2i } = \frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} =$ $= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$	3p
		2p
2.	$f(-x) = (\sqrt{2}+1)^{-x} + (\sqrt{2}-1)^{-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^x =$ $= (\sqrt{2}-1)^x + (\sqrt{2}+1)^x = f(x), \text{ pentru orice număr real } x, \text{ deci funcția } f \text{ este pară}$	3p
		2p
3.	$x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1, \text{ care nu convine, sau } x = 2, \text{ care convine}$	3p
		2p
4.	<p>Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile</p> <p>Numerelor naturale de două cifre care au ambele cifre divizibile cu 3 sunt \overline{ab} cu $a \in \{3,6,9\}$ și $b \in \{0,3,6,9\}$, deci sunt 12 cazuri favorabile</p> $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$	2p
		2p
		1p
5.	<p>Perpendiculara din A pe BC este și mediatoarea lui BC, deci coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt soluțiile sistemului</p> $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ 2y = x + 7 \end{cases}$ $x = 1, y = 4$	3p
		2p
6.	$\cos(\pi - x) = -\cos x, \sin(\pi - x) = \sin x$ $-\sin x \cos x - \sin x \cos x = -1 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ și, cum } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ obținem } x = \frac{\pi}{4}$	2p
		3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot \ln a =$ $= 1 - 0 = 1, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$	2p
		3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a + \ln b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & \ln(ab) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A(ab), \text{ pentru orice } a, b \in (0, +\infty)$	3p
		2p

c)	$A(a) \cdot A(a) \cdot A(a) = A(a^3) = \begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ pentru orice } a \in (0, +\infty)$ $\begin{pmatrix} 1 & \ln a^3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2020 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \ln a^3 = 2020 \Leftrightarrow \ln a = \frac{2020}{3} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{e^{2020}}, \text{ care convine}$	2p 3p
2.a)	$x \circ y = \frac{1}{3}xy + x + y + 3 - 3 = \frac{1}{3}x(y+3) + (y+3) - 3 =$ $= (y+3) \left(\frac{1}{3}x + 1 \right) - 3 = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
b)	$f(x) \circ f(y) = \frac{1}{3}(f(x)+3)(f(y)+3) - 3 = \frac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3) - 3 =$ $= 3xy - 3 = f(xy), \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p 3p
c)	$f\left(\frac{x+3}{3}\right) = 3 \cdot \frac{x+3}{3} - 3 = x, \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \text{ deci } x_k = f\left(\frac{x_k+3}{3}\right), \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}, k \geq 1$ $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = f\left(\frac{x_1+3}{3}\right) \circ f\left(\frac{x_2+3}{3}\right) \circ \dots \circ f\left(\frac{x_n+3}{3}\right) = f\left(\frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3)}{3^n}\right) =$ $= 3 \cdot \frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3)}{3^n} - 3 = \frac{(x_1+3)(x_2+3) \dots (x_n+3) - 3^n}{3^{n-1}}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ <p>și orice numere reale x_1, x_2, \dots, x_{n-1} și x_n</p>	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = -\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}, x \in (1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f(2) = \sqrt{3}, f'(2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ <p>Ecuția tangentei este $y - f(2) = f'(2)(x - 2)$, adică $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{5}{\sqrt{3}}$</p>	2p 3p
c)	$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty, \text{ deci dreapta de ecuație } x = 1 \text{ este asimptotă verticală la graficul}$ <p>funcției f</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1, \text{ deci dreapta de ecuație } y = 1 \text{ este asimptotă orizontală spre}$ <p>$+\infty$ la graficul funcției f, de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1, 1)$</p>	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx = \int_0^1 x^2 dx =$ $= \frac{x^3}{3} \Big _0^1 = \frac{1}{3}$	2p 3p

b)	$f(x) - f(-x) = x^2 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} - (-x)^2 - \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}} = \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}, \text{ pentru orice număr real } x$	2p
	$\int_0^4 (f(x) - f(-x)) dx = \int_0^4 \frac{2x}{\sqrt{x^2+9}} dx = 2\sqrt{x^2+9} \Big _0^4 = 2(5-3) = 4$	3p
c)	$\int_4^a \frac{f(x)}{x} dx = \int_4^a \left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln(x + \sqrt{x^2+9}) \right) \Big _4^a = \frac{a^2-16}{2} + \ln \frac{a + \sqrt{a^2+9}}{9}$	3p
	$\frac{a^2-16}{2} = 10 \text{ și, cum } a > 4, \text{ obținem } a = 6$	2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{11} - \sqrt{5})(\sqrt{11} + \sqrt{5}) = 11 - 5 =$ $= 6 = (\sqrt{6})^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	2p 3p
2.	$f(-x) = \ln \frac{1+(-x)}{1-(-x)} = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{-1} =$ $= -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x)$, pentru orice $x \in (-1, 1)$, deci funcția f este impară	3p 2p
3.	$4 \cdot 2^{2x} + 4 \cdot 2^x - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2 \cdot 2^x + 3) = 0$ Cum $2^x > 0$, pentru orice număr real, obținem $2^x = \frac{1}{2}$, deci $x = -1$	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7\}$ este $A_4^3 =$ $= \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$	3p 2p
5.	$m_{BC} = 1$ și, cum $AD \parallel BC$, obținem $m_{AD} = 1$ Ecuația dreptei AD este $y + 2 = x + 1$, deci $y = x - 1$	3p 2p
6.	$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$, deci $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ $\sin C = 2 \sin B$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = -3a + 8 + 0 - 6 - 0 + 4a =$ $= -3a + 4a + 8 - 6 = a + 2$ pentru orice număr real a	2p 3p
b)	$\det(A(0)) = 2 \neq 0$ $A^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	2p 3p
c)	Pentru $a \neq -2$, obținem $\det(A(a)) \neq 0$, deci sistemul este Cramer Soluția sistemului de ecuații este $(1, -1, 0)$	2p 3p
2.a)	$x * (-2) = 5(x + 2)(-2 + 2) - 2 =$	3p

	$= 0 - 2 = -2$, pentru orice număr real x	2p
b)	$f(x) * f(y) = 5(f(x)+2)(f(y)+2) - 2 = 5\left(\frac{e^x - 10}{5} + 2\right)\left(\frac{e^y - 10}{5} + 2\right) - 2 =$ $= 5 \cdot \frac{e^x}{5} \cdot \frac{e^y}{5} - 2 = \frac{e^{x+y} - 10}{5} = f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
c)	$x * x = 5(x+2)^2 - 2$, $x * x * x = 25(x+2)^3 - 2$ $25(x+2)^3 - 2 = 23 \Leftrightarrow (x+2)^3 = 1$, deci $x = -1$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 =$ $= \frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}} - 1 = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+4x+5} - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+4x+5 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5} + x + 2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = 0$, adică axa Ox , este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x + 2 = \sqrt{x^2+4x+5} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow 4 = 5$, fals, deci $f'(x) \neq 0$, pentru orice număr real x f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant și, cum $f'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}} - 1 < 0$, obținem că $f'(x) < 0$, pentru orice număr real x , deci f este descrescătoare și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ și f este continuă, obținem $\text{Im } f = (0, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$F'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^2-1)(x+1) - x^2}{x^2(x+1)} =$ $= \frac{x^3 - x - 1}{x^2(x+1)} = f(x)$, $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	3p 2p
b)	$\int_1^2 (x+1)f(x) dx = \int_1^2 \frac{x^3 - x - 1}{x^2} dx = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \ln x + \frac{1}{x}\right) \Big _1^2 =$ $= 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \ln 1 + 1\right) = 1 - \ln 2$	3p 2p
c)	$\int_1^a f(x) dx = F(x) \Big _1^a = F(a) - F(1) = \frac{a^2+1}{a} - \ln(a+1) - 2 + \ln 2 = \frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2$ $\frac{a^2+1}{a} - \ln \frac{a+1}{2} - 2 = \frac{1}{2} - \ln \frac{a+1}{2}$, deci $\frac{a^2+1}{a} = \frac{5}{2}$ și, cum $a > 1$, obținem $a = 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(2 + 3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i =$ $= 5i^2 + 12i = i(5i + 12)$	3p 2p
2.	$(f \circ f)(x) = x + a + a = x + 2a$, $f(x+1) = x+1+a$, pentru orice număr real x $x + 2a = x + 1 + a \Rightarrow a = 1$	3p 2p
3.	$5 \cdot 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10 \cdot 6^x = 12 \cdot 5^x$ $\left(\frac{6}{5}\right)^x = \frac{6}{5}$, deci $x = 1$	3p 2p
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri Există $4^2 \cdot 2 = 32$ de funcții $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ astfel încât $f(1) \geq 3$	3p 2p
5.	$m_{AC} = -1$ Cum $BD \perp AC$, obținem $m_{BD} = 1$	2p 3p
6.	$\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 \cdot 0 =$ $= (2 \cdot 3)^x = 6^x$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^x = 3^x$, de unde obținem $x = 0$	3p 2p
c)	$X \cdot X \cdot X = A(1) \cdot X$ și $X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1) \Rightarrow A(1) \cdot X = X \cdot A(1)$, deci, pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0$ și $c = 0$ $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ și $d \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$, deci orice matrice X , pentru care $X \cdot X = A(1)$, are două elemente numere iraționale	3p 2p

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$ $= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + (a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$ Cum $a \neq b$, obținem $x = -a - b$	3p 2p
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$ $(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$ $= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	3p 2p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e - 1$ Pentru orice $x \in (-1, e - 1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e - 1]$ și pentru orice $x \in [e - 1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e - 1, +\infty)$	2p 3p
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$ Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x - e^x) dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x \right) \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	3p 2p
b)	$\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 x(x - e^x) dx = \int_0^1 (x^2 - xe^x) dx = \frac{x^3}{3} \Big _0^1 - (x-1)e^x \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	3p 2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n (x - f(x)) dx = \int_0^1 x^n e^x dx = x^n e^x \Big _0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx =$ $= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$[2 + 3\sqrt{5}] = 2 + [3\sqrt{5}] = 2 + [\sqrt{45}]$ $36 < 45 < 49 \Rightarrow 6 < 3\sqrt{5} < 7$, deci partea întreagă a numărului $2 + 3\sqrt{5}$ este egală cu 8	2p 3p
2.	$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g^2(x) - 4g(x) + 5 = (2-x)^2 - 4(2-x) + 5 = x^2 + 1$, pentru orice număr real x $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = h^2(x) - 4h(x) + 5 = (2+x)^2 - 4(2+x) + 5 = x^2 + 1$, pentru orice număr real x , deci $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$x + 3 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{3-x} + 3 - x = 12 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(3-x)} = 3 \Rightarrow 9 - x^2 = 9$ $x = 0$, care convine	3p 2p
4.	În mulțimea A sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3 Cum în mulțimea A sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea A sunt $15 + 10 - 5 = 20$ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3	2p 3p
5.	$\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{12}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC})$, unde D este mijlocul segmentului BC $\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{15}(-5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}) = \frac{12}{15}\overrightarrow{MG}$, deci \overrightarrow{MG} și \overrightarrow{GN} sunt coliniari, de unde obținem că punctele M , N și G sunt coliniare	3p 2p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = 2R$ și, cum $R = \frac{1}{2}$, obținem $BC = \sin A$ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - BC^2$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot a =$ $= 4 - 0 = 4$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2a + 2b & 4 \end{pmatrix} =$ $= 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a + b & 2 \end{pmatrix} = 2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(5) = 2A(1+2) \cdot A(3) \cdot \dots \cdot A(5) = 2^4 A(1+2+3+4+5) = 2^4 A(15)$ $2^4 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 15 & 2 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow n = 4$ și $x = 15$	3p 2p
2.a)	$5 \circ 2 = 5 + 2 - 7 =$ $= 7 - 7 = 0$	3p 2p

b)	$f(x) \circ f(y) = f(x) + f(y) - 7 = 7 + \log_7 x + 7 + \log_7 y - 7 =$ $= 7 + \log_7 x + \log_7 y = 7 + \log_7(xy) = f(xy)$, pentru orice $x, y \in (0, +\infty)$	3p 2p
c)	$a^2 \circ b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 7$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \geq 3$ sau $ b \geq 3$, obținem $a^2 + b^2 \geq 9$, deci $a^2 \circ b^2 \neq 0$ Pentru $a, b \in \mathbb{Z}$ cu $ a \leq 2$ și $ b \leq 2$, obținem $a^2 + b^2 \in \{0, 1, 2, 4, 5, 8\} \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 7$, deci $a^2 \circ b^2 \neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^{2x} \cdot 2 \cdot (x-5) + e^{2x} \cdot 1 =$ $= e^{2x}(2x-10+1) = e^{2x}(2x-9)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-9}{x-5} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(2 - \frac{9}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{5}{x}\right)} = 2$	3p 2p
c)	$x \in \left(-\infty, \frac{9}{2}\right] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty, \frac{9}{2}\right]$ și $x \in \left[\frac{9}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2}, +\infty\right)$; obținem $f(x) \geq f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x Cum $e^{2x}(x-5) \geq -\frac{e^9}{2}$ și $x-5 < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 5) \Rightarrow e^{2x} \leq \frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x \in (-\infty, 5)$	3p 2p
2.a)	$\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1} dx = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \sqrt{x^2+1} dx = \int_0^2 x dx =$ $= \frac{x^2}{2} \Big _0^2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} \right) dx = \int_1^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx =$ $= \sqrt{x^2+1} \Big _1^2 + \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \Big _1^2 = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	3p 2p
c)	$\int_0^x f(e^t) dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}} \cdot (e^t)' dt = \ln(e^t + \sqrt{e^{2t}+1}) \Big _0^x = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) - \ln(1+\sqrt{2})$, pentru orice număr real x $\ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) - \ln(1+\sqrt{2}) = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x , deci $-\ln(1+\sqrt{2}) = \ln(a-1) \Leftrightarrow a-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$, de unde obținem $a = \sqrt{2}$, care convine	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$ Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	2p 3p
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$ $f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	3p 2p
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x-1 = x^2 + 2x+1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ $x = 1$ sau $x = 2$, care convin	3p 2p
4.	$\{1, 2, 3\} \subset X \Rightarrow 1, 2, 3 \in X$ $X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow X = \{1, 2, 3\}$, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $X = \{1, 2, 3, 5\}$ sau $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1, 2, 3\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$	2p 3p
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$ $(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	2p 3p
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$ $r = \frac{S}{p} = \frac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2-\sqrt{2})$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$ $= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	3p 2p
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$ $x = -9$ sau $x = 0$	3p 2p
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b $\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	3p 2p
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$ $= \sqrt[3]{64} = 4$	3p 2p

b)	Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”, atunci $e * x = x$, pentru orice număr real x , deci $e * 0 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{e^2} = 0$ și obținem $e = 0$	3p
	Cum $0 * 8 = 4 \neq 8$, $e = 0$ nu este element neutru al legii de compoziție „ $*$ ”, deci legea de compoziție „ $*$ ” nu are element neutru	2p
c)	De exemplu, pentru $m = 2k^3$ și $n = 2k^3$, unde $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m * n = \sqrt[3]{m^2 + n^2} = \sqrt[3]{(2k^3)^2 + (2k^3)^2} =$	3p
	$= \sqrt[3]{8k^6} = 2k^2 \in \mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m, n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m * n$ este natural nenul	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (\sqrt{x+1})' =$	2p
	$= 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1} - 1}{2\sqrt{x+1}}, x \in (-1, +\infty)$	3p
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$	2p
	Pentru $x \in \left(-1, -\frac{3}{4}\right]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left(-1, -\frac{3}{4}\right]$ și, pentru $x \in \left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$ $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right)$	3p
c)	$\ln x \geq 1$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$ și f este crescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$f(\ln x) \geq f(1) \Rightarrow \ln x - \sqrt{\ln x + 1} \geq 1 - \sqrt{2} \Rightarrow \ln x \geq \sqrt{\ln x + 1} + 1 - \sqrt{2}$, pentru orice $x \in [e, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^1 \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{e^x} dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 5) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x\right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{1}{3} - 2 + 5 = \frac{10}{3}$	2p
b)	$F'(x) = f(x)$ și $F''(x) = e^x(x^2 - 4x + 5) + e^x(2x - 4) = e^x(x^2 - 2x + 1) = e^x(x - 1)^2$, $x \in \mathbb{R}$	3p
	$e^x(x - 1)^2 \geq 0$, pentru orice număr real x , deci, pentru orice primitivă F a lui f , obținem $F''(x) \geq 0$, pentru orice număr real x , deci F este convexă	2p
c)	$F'(x) = e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) = e^x(ax^2 + (b + 2a)x + c + b)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	3p
	$ax^2 + (b + 2a)x + c + b = x^2 - 4x + 5$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $a = 1$, $b = -6$ și $c = 11$	2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$5 + 2\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{3} - (4 + 2\sqrt{3}) =$ $= 5 + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 1$, care este număr întreg	3p 2p
2.	$2m + 1 = 2m^2 + 2m \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2}$ $m = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$	3p 2p
3.	$x^2 + 5x + 1 = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $x = -4$, care nu convine, sau $x = 1$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $ a + 1 \geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{5}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R$ și, cum $R = 1$, obținem $BC = 2\sin A$ și $AC = 2\sin B$ $4\sin A \cdot \sin B = 2\sin B \cdot 2\sin A = AC \cdot BC$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(2,3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2,3)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 3 - 3 = 0$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b)) = \begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ b & b-2 \end{vmatrix} = (a+1)(b-2) - b(a-1) = 2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b $a \in \mathbb{Q}$ și $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow b - a - 1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \det(A(a,b)) \neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	3p 2p
c)	$A(-1, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$, $\det(A(-1, \sqrt{2})) = 2\sqrt{2}$, $(A(-1, \sqrt{2}))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $X = (A(-1, \sqrt{2}))^{-1} \cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, obținem $X = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	3p 2p

2.a)	$1 \circ 4 = 5 \cdot 1 \cdot 4 + 1 + 4 =$ $= 20 + 5 = 25$	2p 3p
b)	$x \circ 0 = 5x \cdot 0 + x + 0 = x$, pentru orice număr întreg x $0 \circ x = 5 \cdot 0 \cdot x + 0 + x = x$, pentru orice număr întreg x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	2p 3p
c)	$x \in \mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „ \circ ” \Leftrightarrow există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \circ x' = x' \circ x = 0 \Leftrightarrow 5xx' + x + x' = 0$, deci $x' = \frac{-x}{5x+1}$ și, cum $x, x' \in \mathbb{Z}$, obținem $5x+1 = -1$ sau $5x+1=1$ $x = -\frac{2}{5}$, care nu convine, sau $x = 0$, care convine	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$ $= \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3+x} = 1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a, f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a) = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2(a^2+3)}{(a^2+1)^2} = 1$, de unde obținem $a^2 = 1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$	2p 3p
c)	$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}, x \in \mathbb{R}$ Cum $f''(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, \sqrt{3}]$, obținem că funcția f este convexă pe $[0, \sqrt{3}]$	2p 3p
2.a)	$\int_0^{\pi} \frac{f(x)}{e^x} dx = \int_0^{\pi} \frac{e^x \cos x}{e^x} dx = \int_0^{\pi} \cos x dx =$ $= \sin x \Big _0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0 = 0$	2p 3p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = e^x \cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (\cos x)' dx = -1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x dx = -1 + e^x \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx =$ $= -1 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2}$	3p 2p
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{e^{x+\frac{\pi}{2}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{e^x \cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx = e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} =$ $= e^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos \frac{\pi}{3}\right) - e^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos 0) = e^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1}{2} - e^{\frac{\pi}{2}} \ln 1 = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$	3p 2p

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2} + 1 + 3 - 2\sqrt{2} = 4 - \sqrt{2}$	2p
	Cum a și b sunt numere raționale $4 - \sqrt{2} = a + b\sqrt{2} \Leftrightarrow a = 4$ și $b = -1$	3p
2.	$f(2020) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1}$	2p
	$f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} \Rightarrow f(2020) + f\left(\frac{1}{2020}\right) = \frac{2020^2 + 2}{2020^2 + 1} + \frac{2 \cdot 2020^2 + 1}{2020^2 + 1} = \frac{3(2020^2 + 1)}{2020^2 + 1} = 3$	3p
3.	$2^{2x} - 2^{2x+3} = -7 \Leftrightarrow 2^{2x}(1 - 2^3) = -7 \Leftrightarrow 2^{2x} = 1$	3p
	$x = 0$	2p
4.	Sunt $3^3 = 27$ de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$	2p
	Deoarece numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ pentru care $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \neq 0$ este egal cu $2^3 = 8$, obținem că numărul de funcții $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ cu proprietatea că $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) = 0$ este egal cu $27 - 8 = 19$	3p
5.	$AD \parallel BC \Rightarrow m_{AD} = m_{BC}$, deci $m_{AD} = 1$	3p
	Ecuția dreptei AD este $y - 3 = 1 \cdot (x + 1)$, deci $y = x + 4$	2p
6.	$\operatorname{tg} 2x = -1$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, deci $2x = \frac{7\pi}{4}$	3p
	$x = \frac{7\pi}{8}$	2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 1 + 0 + 12 - (-2) - (-3) - 0 = 18$	3p
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$	2p
	$\det(A(a)) = a + 17$, deci $\det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-17\}$	3p
c)	Pentru $a = 1$, obținem $\det(A(1)) = 18 \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	2p
	Soluția sistemului de ecuații este $(1, 1, 1)$	3p
2.a)	$2 * \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 =$	3p
	$= 2 - 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	2p

b)	$a * x = a \Leftrightarrow 2ax - a - x + 1 = a \Leftrightarrow (2a - 1)(x - 1) = 0$, pentru orice număr real x	3p
	$a = \frac{1}{2}$	2p
c)	$f(x * y) = 2(x * y) - 1 = 2(2xy - x - y + 1) - 1 = 4xy - 2x - 2y + 2 - 1 =$	3p
	$= 4xy - 2x - 2y + 1 = (2x - 1)(2y - 1) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = x' - (\ln(2^x + 1))' =$	2p
	$= 1 - \frac{1}{2^x + 1} \cdot (2^x + 1)' = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$	3p
b)	$0 < \frac{2^x}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x și $0 < \ln 2 < 1$, deci $\frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} < 1$, pentru orice număr real x	2p
	$f'(x) = 1 - \frac{2^x \ln 2}{2^x + 1} > 0$, pentru orice număr real x , deci f este crescătoare	3p
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(2^x + 1)}{x} \right) = 1 - 0 = 1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\ln(2^x + 1)) = -\ln 1 = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+2)\sin x}{x+2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} =$	3p
	$= -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$	2p
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)\sin x dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+2)(\cos x)' dx = -(x+2)\cos x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$	3p
	$= -\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)\cos \frac{\pi}{2} + (0+2)\cos 0 + \sin x \Big _0^{\frac{\pi}{2}} = 2 + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 3$	2p
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{f^2(x)} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\sin^2 x}{\frac{1}{n}(x+2)^2 \sin^2 x} dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\frac{1}{n}(x+2)^2} dx = -\frac{1}{x+2} \Big _{\frac{1}{n}}^1 = -\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr	3p
	natural n , $n \geq 2$ $-\frac{1}{3} + \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{9}$, deci $n = 4$, care convine	2p

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = a^2 + 4ai - 4 + a^2 - 4ai - 4 =$ $= 2a^2 - 8 \in \mathbb{R}$	3p 2p
2.	$f(x) - 1 = -\frac{2x}{x^2 + 1} - 1 = -\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = -\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$ Cum $\frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0$, pentru orice număr real x , obținem $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x	3p 2p
3.	$\sqrt{3}^{x+1} = 2^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1} = 1$ $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$	3p 2p
4.	Numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3 =$ $= \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$	3p 2p
5.	Dreapta de ecuație $ax + y - 5 = 0$ are panta egală cu $-a$ Dreapta de ecuație $x - 4y + 3 = 0$ are panta egală cu $\frac{1}{4}$, deci $a = -\frac{1}{4}$	2p 3p
6.	$\operatorname{tg} x + \frac{3}{\operatorname{tg} x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Rightarrow (\operatorname{tg} x - \sqrt{3})^2 = 0$ $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - 1 - 1 - 0 = -2$	2p 3p
b)	$A \cdot B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ $B \cdot A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = I_3$, deci B este inversa matricii A	3p 2p

c)	$\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$	3p
	$2 \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a+2=2 \Leftrightarrow a=0$	2p
2.a)	$i \circ i = i \cdot i \cdot i + i + i =$ $= -i + 2i = i$	3p 2p
b)	$z_1 \circ z_2 = iz_1 z_2 + z_1 + z_2 - i + i = iz_1(z_2 - i) + (z_2 - i) + i =$ $= (z_2 - i)(iz_1 + 1) + i = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	3p 2p
c)	$z \circ 0 = z$, $0 \circ z = z$, pentru orice număr complex z , deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ” $z \circ z' = 0 \Leftrightarrow i(z-i)(z'-i) + i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z'-i) = -1$, deci $z' = -\frac{1}{z-i} + i$ și, cum $z = \frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z' = -\frac{2}{1+i-2i} + i = \frac{-1+i}{1-i} = -1$, care este număr real	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = nx^{n-1} - n \cdot \frac{1}{x} = n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x}\right) =$ $= n \cdot \frac{x^n - 1}{x} = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n - n \ln x + 1 - x^n}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \ln x + 1}{x} =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$, pentru orice număr natural nenul n	2p 3p
c)	Pentru orice $x \in (0, 1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0, 1]$ Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0, 1] \Leftrightarrow a \in [2, +\infty)$	2p 3p
2.a)	$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	3p 2p
b)	$\int_0^1 f(x) e^{x^3+3x} dx = \int_0^1 (x^2 + 1) e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^3 + 3x)' e^{x^3+3x} dx = \frac{1}{3} e^{x^3+3x} \Big _0^1 =$ $= \frac{1}{3} (e^4 - e^0) = \frac{e^4 - 1}{3}$	3p 2p
c)	$\int_0^1 f^7(x) dx = \int_0^1 x'(x^2 + 1)^7 dx = x(x^2 + 1)^7 \Big _0^1 - \int_0^1 14x^2 (x^2 + 1)^6 dx = 2^7 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1 - 1)(x^2 + 1)^6 dx =$ $= 128 - 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^7 dx + 14 \int_0^1 (x^2 + 1)^6 dx$, deci $15 \int_0^1 f^7(x) dx - 14 \int_0^1 f^6(x) dx = 128$	3p 2p