SUBIECTUL III 2 c) – VARIANTA 3- MATE-INFO- SESIUNEA AUGUST 2020

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

c)Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n=\int_0^1 f^n(x)dx$. Arătați că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

CONCEPTE NECESARE PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI:

1° Criteriul cleștelui

Fie $(a_n),(b_n),(c_n)$ trei șiruri de numere reale și $l\in\mathbb{R}$ astfel încât:i) $a_n\le b_n\le c_n,\forall n\ge k$;ii) $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c_n=l$.

Atunci $\lim_{n\to\infty} b_n=l$.

2° Rolul derivatei întâi în studiul funcțiilor

Teoremă Fie $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe intervalul I .

i)funcția este monoton crescătoare pe intervalul I dacă și numai dacă $f'(x)\ge 0,\forall x\in I$

ii)funcția este monoton descrescătoare pe intervalul I dacă și numai dacă $f'(x)\le 0,\forall x\in I$

3° Proprietatea de monotonie a integralei (Inegalități integrale)

Teoremă Fie $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții integrabile pe intervalul $[a,b]$.

i)Dacă $f(x)\ge 0,\forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx\ge 0$, (***pozitivitatea integralei***).

ii) Dacă $f(x)\le g(x),\forall x\in[a,b]$, atunci $\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$, (***monotonia integralei***).

Consecință Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție integrabilă pe intervalul $[a,b]$ și $m,M\in\mathbb{R}$ astfel încât

$m\le f(x)\le M,\forall x\in[a,b]$.Atunci $m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$.

4° Șirul remarcabil (a^n)

i)Dacă $a>1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$;ii)Dacă $a=1$, atunci $\lim_{n\to\infty} a^n=1$;iii)Dacă $a\in(-1,1)$, atunci $\lim_{n\to\infty} a^n=0$;

iv) Dacă $a\le -1$, atunci nu există $\lim_{n\to\infty} a^n$.

Rezolvare:

PASUL 1 Studiem comportamentul (monotonia) funcției f pe intervalul $[0,1]$ pentru a putea decide ce se întâmplă cu valorile funcției $f^n, n \in \mathbb{N}^*$ pe intervalul $[0,1]$.

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3} = \frac{x^2+3-2x-2}{x^2+3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3}, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2+3}\right)' = \frac{(x^2-2x+1)'(x^2+3)-(x^2-2x+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2} = \frac{(2x-2)(x^2+3)-(x^2-2x+1)\cdot 2x}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2+3)-2x(x^2-2x+1)}{(x^2+3)^2} = \frac{2(x^3+3x-x^2-3)-2(x^3-2x^2+x)}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{2(x^3+3x-x^2-3-x^3+2x^2-x)}{(x^2+3)^2} = \frac{2(x^2+2x-3)}{(x^2+3)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Deoarece $(x^2+3)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă că semnul derivatei coincide cu semnul expresiei de gradul II de la numărător .

$$x^2+2x-3=0 \overset{\Delta=16}{\Leftrightarrow} x_{1,2} = \frac{-2\pm 4}{2} \Leftrightarrow x_1=-3 \vee x_2=1$$

x	$-\infty$ $\qquad$ -3 $\qquad$ 1 $\qquad$ ∞
$f'(x)$	+ + + + + + + + + + + + + $\quad 0 \quad$ − − − − − − − − − − − − − − − $\quad 0 \quad$ + + + + + + + + + + + + +
$f(x)$	$\nearrow$ $\qquad$ $\searrow$ $\qquad$ $\nearrow$

Din tabel rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $[-3,1] \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[0,1]$ și deci $f(0) \geq f(x) \geq f(1), \forall x \in [0,1]$. Cum $f(0) = \frac{1}{3}$ iar $f(1) = 0$, rezultă că

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}, \forall x \in [0,1].$$

PASUL 2 Poziționarea valorilor funcției $f^n, n \in \mathbb{N}^*$ pe intervalul $[0,1]$ și aplicarea inegalităților integrale. Din

$$0 \leq f(x) \leq \frac{1}{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq f^n(x) \leq \frac{1}{3^n}, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$$

$$\overset{3^\circ}{\Rightarrow} 0(1-0) \le \int_0^1 f^n(x)\,dx \le \frac{1}{3^n}(1-0), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \le \int_0^1 f^n(x)\,dx \le \frac{1}{3^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

PASUL 3 Deoarece $\underset{a_n}{0} \le \underbrace{\int_0^1 f^n(x)\,dx}_{I_n} \le \underset{c_n}{\frac{1}{3^n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ iar $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} \overset{4^\circ}{=} 0 \overset{1^\circ}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

În continuare prezentăm o modalitate de rezolvare ce „ocolește” studiul monotoniei funcției f !!!

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3} = \frac{x^2+3-2x-2}{x^2+3} = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3} = \frac{\overbrace{(x-1)^2}^{\ge 0, \forall x \in \mathbb{R}}}{\underbrace{x^2+3}_{>0, \forall x \in \mathbb{R}}} \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^n(x) \ge 0, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \int_0^1 f^n(x)\,dx \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow I_n \ge 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ (1)}$$

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2+3} - \frac{2}{x^2+3} \overset{\frac{2x}{x^2+3} \ge 0, \forall x \in [0,1]}{\le} 1 - \frac{2}{x^2+3} = \frac{x^2+3-2}{x^2+3} = \frac{x^2+1}{x^2+3} \le \frac{2}{x^2+3} \le \frac{2}{3}, \forall x \in [0,1] \text{ (2)}$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$0 \le f(x) \le \frac{2}{3}, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le f^n(x) \le \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 \le \int_0^1 f^n(x)\,dx \le \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Utilizând faptul că $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \overset{4^\circ}{=} 0$ și un raționament analog rezultă că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

REȚINEM: TEHNICA FOLOSITĂ RĂSPUNDE SITUAȚIEI CÂND SUNTEM NEVOIȚI SĂ CALCULĂM LIMITA UNUI ȘIR DE INTEGRALE AL CĂRUI TERMEN GENERAL NU POATE FI EXPRIMAT/CALCULAT CU UȘURINȚĂ ȘI SE BAZEAZĂ PE UTILIZAREA :

I)CRITERIULUI CLEȘTELUI PENTRU CALCULUL LIMITELOR DE ȘIRURI

Poziționarea șirului între două șiruri ale căror limite pot fi calculate cu ușurință și coincid!

II)STUDIULUI MONOTONIEI UNEI FUNCȚII CU AJUTORUL SEMNULUI DERIVATEI SALE

III)INEGALITĂȚILOR INTEGRALE