Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(z-1)^2 = i^2 =$	**2p**
	$=-1$	**3p**
2.	$x_1 + x_2 = 5$	**2p**
	$x_1 \cdot x_2 = 3 \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3$	**3p**
3.	$(2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$	**3p**
	$x = 0$ sau $x = 1$	**2p**
4.	Sunt 7 numere de două cifre care sunt divizibile cu 13, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	Panta paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $m = 3$	**3p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 3x - 3$	**2p**
6.	$\sin C = \dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\dfrac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = 12$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
b)	$2A(n^2) - A(n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2 - n & 2n^2 - n + 1 \\ 2 & 2n^2 - n + 2 & 2n^2 - n + 3 \end{pmatrix}$, $A(6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	**3p**
	$2n^2 - n - 6 = 0 \Rightarrow n = -\dfrac{3}{2} \notin \mathbb{N}$, $n = 2 \in \mathbb{N}$	**2p**

c)	Pentru $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, avem $A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\2015y+2016z=0\\2x+2017y+2018z=0\end{cases}$	**2p**
	Determinantul sistemului omogen este egal cu $0\Rightarrow$ sistemul are o infinitate de soluţii, deci există o infinitate de matrice X	**3p**
2.a)	$f=X^3+2X-3$	**2p**
	$f(1)=1+2-3=0$	**3p**
b)	$f=X^3+mX-3$ este divizibil cu $X+1\Leftrightarrow f(-1)=0$	**2p**
	$m=-4$	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m<0\Rightarrow f$ are cel puţin o rădăcină din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$	**2p**
	$f\in\mathbb{R}[X]\Rightarrow f$ are două rădăcini conjugate din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, care au modulele egale	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x-x-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{1-xe^x}{(e^x-x)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$	**2p**
	$f(0)=1$, $f'(0)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x+1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{e^{-x}+x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-e^{-x}}=-1$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 f^2(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big\|_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}dx=x^{n-1}\sqrt{x^2+4}\Big\|_0^1-(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+4}\,dx=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\frac{x^{n-2}(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}dx=$	**3p**
	$=\sqrt{5}-(n-1)I_n-4(n-1)I_{n-2}\Rightarrow nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$7+x^2+2=2\cdot 3x$	**3p**
	$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.	$\Delta=0 \Leftrightarrow 4-4m=0$	**3p**
	$m=1$	**2p**
3.	$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=2^{5x} \Leftrightarrow -4x+9=5x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6=2^6=64$ de submulțimi, deci sunt 64 de cazuri posibile	**2p**
	Mulțimea A are $C_6^0+C_6^1+C_6^2=1+6+15=22$ de submulțimi cu cel mult două elemente, deci sunt 22 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$	**1p**
5.	Punctul $M(1,2)$ este mijlocul laturii BC	**1p**
	$m_{AM}=\dfrac{2-0}{1-(-1)}=1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu dreapta AM este $y=x-1$	**2p**
6.	$\dfrac{BC}{\sin A}=2R \Rightarrow R=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{3\pi}{4}}=$	**3p**
	$=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(10))=\begin{vmatrix}1&10&0\\0&1&0\\0&0&2^{10}\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2^{10}=1024$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$	**2p**
	$A(3x)=A\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=2$	**3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, obținem $A(n)=$ $=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A(2017\cdot 1008)$	**3p**
	$n=2017\cdot 1008$, deci n este număr natural divizibil cu 2017	**2p**

2.a)	$f(0)=0^3-5\cdot 0+a=$ $=0-0+a=a$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5(x_1+x_2+x_3)-3a=-3a$ $-3a=2016-4a \Leftrightarrow a=2016$	**3p** **2p**
c)	Presupunem că f are cel puţin două rădăcini întregi x_1 şi x_2; cum $x_1+x_2+x_3=0 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{Z}$ Ştiind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=10$, dacă $x_1^2 \geq x_2^2 \geq x_3^2$, obţinem $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ şi $x_3^2=0$ Deoarece pentru valorile pe care le obţinem pentru x_1, x_2 şi x_3, relaţia $x_1+x_2+x_3=0$ nu este verificată, polinomul f are cel mult o rădăcină întreagă	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=$ $=e^x-\frac{1}{2}\cdot 2x-1=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	Aplicând succesiv teorema lui l'Hospital, obţinem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}=1$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=e^x-1>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f' strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ şi cum $f'(0)=0$, obţinem $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci f strict crescătoare pe $(0,+\infty)$ $0<2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$	**3p** **2p**
2.a)	$I_1=\int\limits_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left.\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right\|_0^1=$ $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
b)	$I_{n+1}-I_n=\int\limits_0^1\left(-x^2\right)\left(1-x^2\right)^n dx$, pentru orice număr natural nenul n Pentru orice număr natural nenul n şi $x\in[0,1]$ avem $-x^2\leq 0$ şi $\left(1-x^2\right)^n\geq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$	**2p** **3p**
c)	$I_{n+1}=\int\limits_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=\left.x\left(1-x^2\right)^{n+1}\right\|_0^1-\int\limits_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=$ $=2(n+1)\int\limits_0^1 x^2\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\int\limits_0^1\left(1-x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^n dx=-2(n+1)\left(I_{n+1}-I_n\right)$, deci $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1z_2+2z_1+z_2=(2+3i)(4-6i)+2(2+3i)+4-6i=$	**2p**
	$=8-12i+12i-18i^2+4+6i+4-6i=34$, care este număr real	**3p**
2.	$g(0)=1$	**2p**
	$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=1$	**3p**
3.	$x^2-4=5x-8\Rightarrow x^2-5x+4=0$	**3p**
	$x=1$, care nu verifică ecuația; $x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 13 numere naturale de două cifre, multipli de 7, deci sunt 13 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{13}{90}$	**2p**
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 3	**2p**
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y=3x-3$	**3p**
6.	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x-x\right)=$	**3p**
	$=\cos\dfrac{\pi}{2}=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4$	**3p**
b)	$A(x)+B(x)=\begin{pmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(x)+B(x))=\begin{vmatrix}x&0&x\\0&2x&0\\2&0&1\end{vmatrix}=2x^2-4x^2=$	**3p**
	$=-2x^2=\det(B(x))$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(n)B(p)=\begin{pmatrix}n&0&0\\0&n&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&p\\0&p&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&np\\0&np&0\\2&0&0\end{pmatrix}$, $B(3)=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&3&0\\2&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(n)B(p)=B(3)\Leftrightarrow np=3$ și, cum n și p sunt numere naturale, obținem $n=1$, $p=3$ sau $n=3$, $p=1$	**3p**
2.a)	$f(1)=0\Leftrightarrow 1^3+a\cdot1^2+8\cdot1+3=0$	**2p**
	$a=-12$	**3p**

b)	$a=6 \Rightarrow f=X^3+6X^2+8X+3$ și câtul este $X+1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-a$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8 \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2-16$	**3p**
	Pentru $a\in(-4,4)$, obținem $a^2-16<0$, deci $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, adică polinomul f nu are toate rădăcinile reale	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^{2018}\right)'+(2018x)'+2'=$	**2p**
	$=2018x^{2017}+2018=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=2018x+2$	**3p**
	$2020=2018a+2 \Leftrightarrow a=1$	**2p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $f(-1)=-2015$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}+2x\right)\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+1+2=\frac{10}{3}$	**2p**
b)	$I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}+2x^n+2x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\frac{x^{n-1}\left(x^2+2x+2\right)}{x^2+2x+2}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\left.\frac{x^n}{n}\right\vert_0^1=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
c)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}dx\leq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$5I_{n+1}\leq I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}\leq 5I_{n-1} \Rightarrow 5I_{n+1}\leq\frac{1}{n}\leq 5I_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, $\frac{n}{5(n+1)}\leq nI_n\leq\frac{n}{5(n-1)}$, deci $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\log_3\left(\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right)=\log_3(7-4)=$	**3p**
	$=\log_3 3=1\in\mathbb{N}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-1=x^2+6x+3\Leftrightarrow x^2+4x+4=0$	**2p**
	Coordonatele sunt $x=-2$ și $y=f(-2)=-5$	**3p**
3.	$(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere	**3p**
5.	$NP=2$	**2p**
	Punctul P aparține segmentului MN, deci $MP=MN-NP=1$	**3p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\sin(2\pi-x)=-\sin x$	**3p**
	$\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x+(-\sin x)+(-\sin x)=0$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}2&3&1\\1&2&3\\2&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=12+1+18-4-6-9=12$	**3p**
b)	$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix}n^2&n&1\\1&n^2&n\\n^2&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\1&n^2&n\\1&1&n\end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix}1&n&1\\0&n^2-n&n-1\\0&1-n&n-1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0$, pentru orice număr natural n	**2p**
c)	$B=\begin{pmatrix}x^2+x&1&x\\2x&x^2&1\\x^2+1&x&x\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix}x^3+2x^2+1&2x&x^2+x\\3x^2+x&x^3+1&2x\\x^3+x^2+2x&x^2+x&x^2+1\end{pmatrix}$	**3p**
	Inversa matricei B este matricea $A(x,0)\Leftrightarrow B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$, deci $x=0$	**2p**
2.a)	$f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=$	**3p**
	$=n+1-n-1=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$	**2p**

b)	Pentru n număr natural impar, $n \geq 3$, $f(-1) = n \cdot (-1)^n + (-1)^2 - n \cdot (-1) - 1 = 0$, deci polinomul f este divizibil cu $X+1$	**2p**
	$f(1) = 0 \Rightarrow f$ este divizibil cu $X-1$, deci polinomul f este divizibil cu $X^2 - 1$	**3p**
c)	Dacă $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ este o rădăcină a polinomului f care are coeficienții întregi, atunci $\alpha = \frac{1}{d}$, unde $d \in \mathbb{Z}^* \setminus \{\pm 1\}$ este un divizor al lui n	**1p**
	$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \Rightarrow d^{n-2}\left(d^2 + nd - 1\right) = n \Rightarrow d^{n-2} / n$, deci $\lvert d \rvert^{n-2} \leq n$	**2p**
	Cum $\lvert d \rvert^{n-2} \geq 2^{n-2} > n$ pentru orice număr natural n, $n \geq 5$, obținem o contradicție, deci polinomul f nu are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = (\operatorname{arctg} x)' - (x)' = \frac{1}{x^2+1} - 1 =$	**2p**
	$= \frac{1 - x^2 - 1}{x^2 + 1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} - 1 \right) = -1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (\operatorname{arctg} x - x + x) = \frac{\pi}{2}$, deci dreapta de ecuație $y = -x + \frac{\pi}{2}$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p**
c)	$f(x) + g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow (f(x) + g(x))' = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 0$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $f(0) + g(0) = \frac{\pi}{2}$, obținem că $f(x) + g(x) = \frac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right) dx = \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-x} \Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= -\frac{1}{e} + 1 = \frac{e-1}{e}$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x) = -2x e^{-x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția F este concavă pe $(0, +\infty)$	**3p**
c)	$I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x) dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x) dx \geq 0$, deci $I_{n+1} \geq I_n$, pentru orice număr natural nenul n	**1p**
	$0 \leq I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x^2} dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1 dx = 1 - \frac{1}{n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	Șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit, deci șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent	**1p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$	**3p**
	Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	**2p**
2.	$x_1^2-1=mx_1$, $x_2^2-1=mx_2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\frac{mx_1}{x_1}+\frac{mx_2}{x_2}=2$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{2-x}=x\Rightarrow 2-x=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile	**1p**
	Pentru $n\le 20$, obținem $\log_2 n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8,16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$	**2p**
5.	$m_{MP}=-1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$	**2p**
	$Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP, deci ecuația mediatoarei este $y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+1$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(0))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-4)+0-0-(-6)-(-1)=3$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{vmatrix}=-4m^2+m+3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det(M(m))=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$ sau $m=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4},1\right\}$	**3p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$4(1-\alpha)^2=(3-\alpha)^2\Leftrightarrow\alpha=-1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5,2,-1)$ sau $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	**2p**

2.a)	$x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} =$	**2p**
	$= \frac{1}{3}x\left(y - \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x * x = \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$, $x * x * x = \frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ sau $x = \frac{3}{2}$ sau $x = \frac{9}{2}$	**3p**
c)	$x * \frac{9}{2} = \frac{9}{2} * x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = \frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”	**2p**
	$n * n' = n' * n = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 4nn' - 6n - 6n' = 27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n, n' \in \mathbb{N}$, numărul $4nn' - 6n - 6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} =$	**3p**
	$= \frac{x^2 - x}{x^2+x+1} = \frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -\frac{1}{7}x + 2 \Leftrightarrow f'(a) = -\frac{1}{7}$	**2p**
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1} = -\frac{1}{7} \Leftrightarrow 8a^2 - 6a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$ sau $a = \frac{1}{2}$	**3p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - \ln 3 \in (-1, 0)$	**3p**
	f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, deci, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ nu are nicio soluție în $[0, +\infty)$	**1p**
	f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0) \Rightarrow$ pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică în $(-\infty, 0)$, deci pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică	**1p**
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x)\,dx = \int_0^2 e^x \cdot \frac{x}{e^x}\,dx = \int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right\vert_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 0 = 2$	**2p**
b)	$\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} \lvert f(x)\rvert\,dx = \int_{-1}^{0} -xe^{-x}\,dx + \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \left.(x+1)e^{-x}\right\vert_{-1}^{0} - \left.(x+1)e^{-x}\right\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$	**2p**
c)	$(n+2)I_n = (n+2)\int_0^1 x^n f(x)\,dx = (n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 \left(x^{n+2}\right)' e^{-x}\,dx = \frac{1}{e} + \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx$	**2p**
	$0 \le x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \le e^{-x} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot x^{n+2} \le x^{n+2}e^{-x} \le x^{n+2} \Rightarrow \frac{1}{e}\int_0^1 x^{n+2}\,dx \le \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx \le \int_0^1 x^{n+2}\,dx$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^{n+2}\,dx = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+3} = 0$, obținem $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 x^{n+2}e^{-x}\,dx = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} (n+2)I_n = \frac{1}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\frac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 2a_2=a_1+a_3$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2 \Leftrightarrow 30=3a_2 \Leftrightarrow a_2=10$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(0)=9$	**3p**
3.	$(x-6)(x+6)=2^6\Rightarrow x^2-36=64\Rightarrow x^2-100=0$	**3p**
	$x=-10$, care nu convine; $x=10$, care convine	**2p**
4.	Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5\cdot 5=25$ de numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$	**3p**
	Cum $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, obținem $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	**2p**
6.	$C=\pi-(A+B)=\frac{\pi}{3}\Rightarrow \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+(-1)+2-4-(-1)-2=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=2(a^2-1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea $A(a)$ are rangul $2\Leftrightarrow \det(A(a))=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ și soluția sistemului este $\left(\frac{2}{a+1},1,\frac{2}{a+1}\right)$	**3p**
	$\left(\frac{2}{a+1}\right)^2+1+\left(\frac{2}{a+1}\right)^2=3$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $a=-3$	**2p**

2.a)	$x * y = xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$	**2p**
	$= x\left(y - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} - x\right) = 0$	**1p**
	$\frac{1}{x} - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = 2$	**1p**
	$x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{1}{x} - x = 0 \Rightarrow x = -1$ sau $x = 1$	**2p**
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y, deci $x * y = e$, de unde obținem $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	**2p**
	$\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow (2x-1)(2y-1) = 4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2x - 8 + \frac{8}{x} =$	**3p**
	$= \frac{2x^2 - 8x + 8}{x} = \frac{2(x-2)^2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 2$, deci are panta egală cu $f'(2)$	**2p**
	Cum $f'(2) = 0$, ecuația dreptei este $y = 3$	**3p**
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0, +\infty)$ și, cum $f(2) = 0$, obținem $f(a) \geq 0$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$	**2p**
	$f(a) \geq 0 \Rightarrow g(a) \geq h(a) \Rightarrow b \geq c$, pentru orice $a \in [2, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2 + 4) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} - 4 = -\frac{11}{3}$	**2p**
b)	$F'(x) = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, $F''(x) = f'(x) = \frac{16x}{(x^2+4)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f	**3p**
	$F''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, deci funcția F este concavă pe $(-\infty, 0]$	**2p**
c)	$x \in [1,2] \Rightarrow x^n (x^2 - 4) \leq 0$ și $\frac{1}{x^2 + 4} \geq \frac{1}{8}$, deci $x^n f(x) \leq \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4)$	**2p**
	$I_n \leq \int_1^2 \frac{1}{8} x^n (x^2 - 4) dx = \frac{1}{8}\left(\frac{x^{n+3}}{n+3} - \frac{4x^{n+1}}{n+1}\right)\Big\|_1^2 = \frac{1}{8}\left(-\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} - \frac{1}{n+3} + \frac{4}{n+1}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)} = +\infty$, obținem $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = -\infty$	**1p**