Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=\frac{(2+3i)(3+2i)}{4+9}=\frac{13i}{13}=i$	**3p**
	Partea reală a numărului z este egală cu 0	**2p**
2.	$\Delta=1+4a$	**2p**
	$1+4a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$	**3p**
3.	$4^x+3\cdot4^x-16=0 \Leftrightarrow 4\cdot4^x=16$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile	**2p**
	Sunt $C_7^2=21$ de cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	**2p**
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(3,2)$, care este mijlocul segmentului MN	**2p**
	$m_{MN}=-1\Rightarrow m_d=1$	**1p**
	Ecuația dreptei d este $y=x-1$	**2p**
6.	$\sin(\pi-x)=\sin x$, $\cos(2\pi-x)=\cos x$	**2p**
	$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=4$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p**
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(x)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+x$	**3p**
	$1+x=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&-b\\-b&0&0\\0&-b&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&c&0\\0&0&c\\c&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$	**2p**

	$\det\left(aI_3 - bA(-1) + cA(-1)\cdot A(-1)\right) = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = (a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right) =$	**1p**
	$= \frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right) \geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c	**2p**
2.a)	$x * y = xy - 5x - 5y + 25 + 5 =$	**2p**
	$= x(y-5) - 5(y-5) + 5 = (x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere întregi x și y	**3p**
b)	Elementul neutru al legii de compoziție „$*$” este 6	**1p**
	x este simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = x' * x = 6$, de unde $x' = 5 + \frac{1}{x-5}$	**2p**
	Cum x' este număr întreg, obținem $x = 4$ sau $x = 6$	**2p**
c)	$x * 5 = 5$ și $5 * y = 5$, pentru x și y numere întregi	**2p**
	5 este divizor al lui 2015	**1p**
	2015 are 8 divizori naturali și legea de compoziție este asociativă, avem $d_1 * d_2 * \cdots * d_8 = 5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' - \left(\ln(x+1)\right)' =$	**2p**
	$= 1 - \frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x - f(x) - \ln 2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x+1) - \ln 2}{x-1} =$	**2p**
	$= \frac{1}{2}$	**3p**
c)	$f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-1, 0)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**3p**
	$f(x) \geq f(0) \Rightarrow \ln(x+1) \leq x$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 \frac{f(x) + x^2 f(x)}{x^4+1}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx =$	**2p**
	$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x^2\right)\Big\vert_0^1 = \frac{\pi}{8}$	**3p**
c)	Din regula lui l`Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$, limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to 1}\left(\int\limits_1^x f(t)\,dt\right)' =$	**3p**
	$= \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2a+1)+(2b-1)i=0$	**3p**
	Cum a și b sunt numere reale, obținem $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$\Delta=m^2-4$	**2p**
	$-\frac{m^2-4}{4}=-3\Leftrightarrow m^2-16=0\Leftrightarrow m=-4$ sau $m=4$	**3p**
3.	$\log_3 x=\frac{1}{\log_3 x}\Rightarrow(\log_3 x+1)(\log_3 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=3$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Pătratele perfecte de o cifră sunt $0, 1, 4$ şi 9, deci sunt $3\cdot 4=12$ numere naturale de două cifre care au ambele cifrele pătrate perfecte, adică sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{90}=\frac{2}{15}$	**2p**
5.	Punctele A, B şi C sunt coliniare, deci $m_{AB}=m_{BC}$	**2p**
	$\frac{-3-a}{0+1}=\frac{1+3}{1-0}\Leftrightarrow a=-7$	**3p**
6.	$\sin^2\frac{\pi}{7}-2\sin\frac{\pi}{7}\cos a+\cos^2 a+\cos^2\frac{\pi}{7}-2\cos\frac{\pi}{7}\sin a+\sin^2 a=2\Leftrightarrow 2-2\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=2$	**3p**
	Cum $a\in(0,\pi)$, din relația $\sin\left(\frac{\pi}{7}+a\right)=0$, obținem $a=\frac{6\pi}{7}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}2&1&m\\m&m&1\\1&m&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&m+1\\m&m&m+1\\1&m&m+1\end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix}2&1&1\\m-2&m-1&0\\-1&m-1&0\end{vmatrix}=(m+1)(m-1)^2$	**2p**
	Matricea $A(m)$ este inversabilă $\Leftrightarrow\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow(m+1)(m-1)^2\neq 0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$	**3p**

c)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\det(A(0))=1\neq 0$, $(A(0))^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&2&-2\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&9&-7\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-4x-4y+16+4=$	**2p**
	$=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*4=4*y=4$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2016=((1*2*3)*4)*(5*\ldots*2016)=4*(5*\ldots*2016)=4$	**3p**
c)	$(a-4)(b-4)(c-4)=62$, unde a, b și c sunt numere naturale și $a<b<c$	**1p**
	$\begin{cases}a-4=-2\\b-4=-1\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=35\end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases}a-4=1\\b-4=2\\c-4=31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=6\\c=35\end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x+1)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=0$	**3p**
	Coordonatele punctului sunt $x=-\frac{1}{2}$ și $y=-4$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=$	**3p**
	$=\frac{1}{e}$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)dx=\int_2^4\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}dx=\int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\ln 2$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx=\int_1^e\left(-\frac{1}{x}\right)'\ln x\,dx=-\frac{1}{x}\ln x\Big\vert_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big\vert_1^e=1-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	Cum $x\in[1,e]$, obținem $0\le\ln x\le 1$, deci $0\le\frac{\ln x}{x^{n+1}}\le\frac{1}{x^{n+1}}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx\le\int_1^e\frac{1}{x^{n+1}}dx=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\right)=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}dx=0$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2-i)(2+i)}=$	**2p**
	$=\frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{2^2-i^2}=\frac{6}{5}$	**3p**
2.	$x_1+x_2=2m+3$, $x_1x_2=m^2+3m+2$	**2p**
	$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=1$, pentru orice număr real m	**3p**
3.	$\sqrt{x-3}=5-x \Rightarrow x-3=(5-x)^2$, deci $x^2-11x+28=0$	**3p**
	$x=7$, care nu verifică ecuaţia, sau $x=4$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri	**2p**
	Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4\cdot 3=48$ de numere	**3p**
5.	$MP \parallel BC$, $NP \parallel AB$	**2p**
	$BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$	**3p**
6.	$2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ sau $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, obținem $x=\frac{\pi}{2}$ sau $x=\frac{5\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&a&3\\1&3&a\end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$	**3p**
	$=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(m)A(2-m)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&3\\1&3&m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2-m&3\\1&3&2-m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6-m&6-m\\m+4&-m^2+2m+10&7\\m+4&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(2-m)A(m)=\begin{pmatrix}3&m+4&m+4\\6-m&-m^2+2m+10&7\\6-m&7&-m^2+2m+10\end{pmatrix}$, de unde obținem $m=1$	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 3$; pentru fiecare număr întreg a, $a \neq -1$ și $a \neq 3$, soluția sistemului este de forma $\left(\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1}\right)$	**3p**
	Cum $a \in \mathbb{Z}$, obținem $\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a=-2$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$	**2p**
	$= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2 = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$n * n = 2 - 5(n-2)^2$, $(n*n)*n = 2 + 25(n-2)^3$	**3p**
	$2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)\left(25(n-2)^2 - 1\right) = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 2$	**2p**
c)	$a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2$	**1p**
	$b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2$, deci $a - 2 = -125(a-2)^4$	**2p**
	$a - 2 = 0$, de unde $a = b = 2$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$, de unde $a = b = \frac{9}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$	**1p**
	$x \in [-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-2, +\infty)$	**1p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$	**1p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)\right)^{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\left(1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \cdot x} =$	**2p**
	$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = \frac{1}{e^2}$	**2p**
c)	$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = f'(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci g este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1 - a > 0$, $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1 - a > 0$, pentru orice $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuaţia $f(x) = a$ are exact două soluţii reale distincte	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\sqrt{x+1}\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$	**2p**
b)	$x \in [0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ și $x^n \geq 0$, deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1 = \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

c)	$I_n=2\int_0^1 x^n\left(\sqrt{x+1}\right)'dx=2x^n\left(\sqrt{x+1}\right)\Big\vert_0^1-2n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{x+1}\,dx=2\sqrt{2}-2n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+1}}dx=$	**3p**
	$=2\sqrt{2}-2n\int_0^1\frac{x^n+x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{2}-2nI_n-2nI_{n-1}\Rightarrow(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=5+\sqrt{5}$	**2p**
	Cum $2<\sqrt{5}<3$, obținem $[a]=5+\left[\sqrt{5}\right]=7$	**3p**
2.	$(f\circ f)(x)=x+2m$, $f(x+1)=x+1+m$	**2p**
	$x+2m=x+1+m$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}\Leftrightarrow 4x+1\ge 3x+5$	**3p**
	$x\in[4,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel puțin 3 elemente ale mulțimii A este $C_{10}^3+C_{10}^4+\dots+C_{10}^{10}=$	**3p**
	$=2^{10}-C_{10}^0-C_{10}^1-C_{10}^2=1024-1-10-45=968$	**2p**
5.	$\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MQ}$, unde $MNQP$ este paralelogram	**2p**
	$m(\sphericalangle M)=90^\circ$, deci $MNQP$ este dreptunghi și $MQ=NP=10$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}+2=0\Leftrightarrow\frac{(\operatorname{tg}x+1)^2}{\operatorname{tg}x}=0$	**2p**
	$\operatorname{tg}x=-1$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{3\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 0 & 2x-1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 2x-1 & 0 & x\end{vmatrix}=\frac{x^2}{2}+0+0-\frac{(2x-1)^2}{2}-0-0=\frac{-3x^2+4x-1}{2}$	**3p**
	$x=\frac{1}{3}$ sau $x=1$	**2p**
b)	$A(x)+A(1-x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 2x-1 & 0 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1-2x\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1-2x & 0 & 1-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$	**3p**
	$x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$x\circ y=\left(xy+\hat{3}x\right)+\left(\hat{3}y+\hat{9}\right)=$	**2p**
	$=x\left(y+\hat{3}\right)+\hat{3}\left(y+\hat{3}\right)=\left(x+\hat{3}\right)\left(y+\hat{3}\right)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$	**3p**
b)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(x+\hat{3}\right)=\hat{0}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$	**2p**
	$a+\hat{3}=\hat{0}\Rightarrow a=\widehat{17}$	**3p**
c)	$\left(a+\hat{3}\right)\left(b+\hat{3}\right)=\hat{0}$	**2p**
	De exemplu, pentru $a=\hat{1}$ și $b=\hat{2}$, obținem $a+\hat{3}=\hat{4}$ și $b+\hat{3}=\hat{5}$, deci $a\circ b=\hat{0}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=\frac{7}{2}$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right]$, deci f este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$, deci f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$	**2p**
	f continuă pe $(0,+\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{4}\right)$ și, cum $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{8}$, obținem $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{3}{8},+\infty\right)$	**2p**
c)	$e^x>0$, deci $f\left(e^x\right)\ge-\frac{3}{8}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$2\left(e^x\right)^2-\sqrt{e^x}\ge-\frac{3}{8}$, deci $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge 0$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1 f(\operatorname{tg}x)\,dx=\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)\,dx=\int\limits_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^1=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2+1}dx=\int\limits_0^1(\operatorname{arctg}x)'\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 1=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^2}{32}$	**2p**

c)	$(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^{n+1}\right)'\operatorname{arctg}x\,dx=x^{n+1}\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{x^2+1}\le1\Rightarrow\frac{1}{2}\int_0^1 x^{n+1}\,dx\le\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}dx\le\int_0^1 x^{n+1}\,dx$ și, cum $\int_0^1 x^{n+1}\,dx=\frac{1}{n+2}$, obținem $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=6-3i+4i-2i^2-4-4i=4-3i$	**3p**
	$\lvert z\rvert=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$	**2p**
2.	$\Delta=(2m+1)^2-4m(m-1)=8m+1$	**2p**
	$\Delta\le 0$, deci $m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$	**3p**
3.	$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1\Rightarrow(2\log_2 x+1)(\log_2 x-1)=0$	**3p**
	$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $x=2$, care convin	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu cel mult două elemente ale mulțimii A este $C_n^0+C_n^1+C_n^2$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii A	**3p**
	$1+n+\frac{n(n-1)}{2}=16$ și, cum n este număr natural, obținem $n=5$	**2p**
5.	M mijlocul laturii $BC\Rightarrow\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{MN}$	**2p**
	N mijlocul segmentului AM, deci $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NA}$, deci $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NA}=\vec{0}$	**3p**
6.	$1+3\cos x=2\cos^2 x-1\Leftrightarrow 2\cos^2 x-3\cos x-2=0\Leftrightarrow(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$	**3p**
	$\cos x=-\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, obținem $x=\frac{2\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=$	**3p**
	$=-a^2+3a=a(3-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$\det(A(0))=0$ și un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\neq 0$	**2p**
	Minor caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=3\neq 0$, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

c)	Sistemul are soluție unică $(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \setminus \{0,3\}$ și soluția sistemului este $\left(1-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$	3p
	x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi, deci $\frac{1}{a}$ este număr întreg și, cum și a este număr întreg, obținem $a=-1$ sau $a=1$, care convin	2p
2.a)	$x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 - 1} =$	2p
	$= \sqrt{x^2\left(y^2+1\right) + \left(y^2+1\right) - 1} = \sqrt{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right) - 1}$, pentru orice numere reale x și y	3p
b)	$\sqrt{\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)-1} = 1 \Leftrightarrow \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) = 2$	2p
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=1$, $b=0$ sau $a=0$, $b=1$	3p
c)	$\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}} = \sqrt{2^n - 1}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	2p
	Dacă $\sqrt{2^n-1} \in \mathbb{N}$, există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = k^2 \Rightarrow k$ impar, deci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât $2^n - 1 = (2m+1)^2$, de unde obținem $2^{n-1} = 2m^2 + 2m + 1$, ceea ce este imposibil, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 =$	3p
	$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -2$	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x)+2x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2} - x - 1} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = -2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$\sqrt{x^2+2x+2} > x+1 \Rightarrow f'(x) < 0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$	2p
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, deci $\operatorname{Im} f = (2, +\infty)$	3p
2.a)	$\int_1^2 \frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx = \int_1^2 \left(3x^2 - 2x\right)dx = \left(x^3 - x^2\right)\Big\|_1^2 =$	3p
	$= 8 - 4 - 1 + 1 = 4$	2p
b)	$\int_0^1 x\ln(x+1)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' \ln(x+1)dx = \frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big\|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 (x-1)dx =$	3p
	$= -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$	2p
c)	$\lim\limits_{t\to0} \frac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx = \lim\limits_{t\to0} \frac{f(t)}{3t^2} =$	3p
	$= \lim\limits_{t\to0} \frac{\ln(t+1)}{3t} = \frac{1}{3}$	2p