Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-2+0,75=$ $=-1,25$	**3p** **2p**
2.	Punctele de intersecție cu axele de coordonate sunt $A(3,0)$ și, respectiv, $B(0,4)$ Distanța AB este egală cu 5	**2p** **3p**
3.	$\left(3^{-1}\right)^{2x+10}=3^4 \Leftrightarrow -2x-10=4$ $x=-7$	**3p** **2p**
4.	$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\ldots+C_n^n=2^n$ $2^n=64 \Leftrightarrow n=6$	**3p** **2p**
5.	$MN=4$ $NP=4 \Rightarrow \Delta MNP$ este isoscel	**2p** **3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=24$ $p=12$, deci $r=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(2,0)\right)=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{vmatrix}=$ $=8$	**3p** **2p**
b)	$A(x,a)+A(x,-a)=\begin{pmatrix}x&a&a\\-a&x&a\\-a&-a&x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&-a&-a\\a&x&-a\\a&a&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0&0\\0&2x&0\\0&0&2x\end{pmatrix}=$ $=2x\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a	**2p** **3p**
c)	$\det\left(A(x,-3)\right)=\begin{vmatrix}x&-3&-3\\3&x&-3\\3&3&x\end{vmatrix}=x^3+27x$ $x\left(x^2+27\right)=0 \Leftrightarrow x=0$	**3p** **2p**
2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$ $=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$a\circ b=2 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=1$ Cum a și b sunt numere întregi, obținem $a=-2, b=-2$ sau $a=0, b=0$	**2p** **3p**

c)	$(-1)\circ x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 2015=(-1)\circ(0\circ 1\circ\ldots\circ 2015)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+xe^x-e^x=$	**3p**
	$=xe^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{-x}}-e^x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}+1=1$	**3p**
	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,0]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int\limits_0^1\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=x^4+x^3+x^2+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(-1)=1\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$	**3p**
c)	$\int\limits_0^a f(x)dx+\frac{1}{a}\int\limits_a^0 f(x)dx=\int\limits_0^a\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx+\frac{1}{a}\int\limits_a^0\left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx=$	**2p**
	$=\left(a^4+a^3+a^2+a\right)-\frac{1}{a}\left(a^4+a^3+a^2+a\right)=a^4-1$, pentru orice număr real nenul a	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii
- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a_1+9r)=a_1+4r+a_1+5r+36 \Leftrightarrow 9r=36$	**3p**
	$r=4$	**2p**
2.	$x^2+3x-1=x-1 \Leftrightarrow x^2+2x=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=0$	**2p**
3.	$\log_2 \frac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}=4 \Rightarrow (x-1)^2=16$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifra unităților zero, 4 numere cu cifra zecilor cinci și cifra unităților număr par nenul și 4 numere cu cifra unităților cinci și cifra zecilor număr par, deci sunt 17 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{17}{90}$	**2p**
5.	$A(1,1)$, $B(1,4) \Rightarrow AB \parallel Oy$ și $A(1,1)$, $C(5,1) \Rightarrow AC \parallel Ox$, deci ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	Centrul cercului circumscris ΔABC este mijlocul laturii BC și are coordonatele $\left(3,\frac{5}{2}\right)$	**3p**
6.	$1+\cos 2x=2\cos^2 x$	**2p**
	$1-\cos 2x=2\sin^2 x \Rightarrow \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}=\frac{2\cos^2 x}{2\sin^2 x}=\text{ctg}^2 x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=3+(-2)+0-0-(-1)-2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$2M(x)-M(-x)=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&6&2\\2x&4x-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\-x&-2x-1&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3x&6x-1&1\end{pmatrix}=M(3x)$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ n & 2n-1 & 1\\ n^2 & 2n^2-1 & 1\end{vmatrix}=n(n-1)$, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert=\frac{n(n-1)}{2}$	3p
	Cum pentru orice număr natural n, $n\ge 2$, numerele $n-1$ și n sunt consecutive, produsul lor este număr par, deci $\mathcal{A}_{\Delta OAB}$ este număr natural	2p
2.a)	$1\circ\frac{1}{3}=6\cdot 1\cdot\frac{1}{3}-2\cdot 1-2\cdot\frac{1}{3}+1=$	2p
	$=\frac{1}{3}$	3p
b)	$x\circ e=6xe-2x-2e+1=6ex-2e-2x+1=e\circ x$, pentru orice număr real x	2p
	$x\circ e=x\Leftrightarrow(3x-1)(2e-1)=0$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{1}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	3p
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru x și y numere reale	2p
	$\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\frac{3}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}=\left(\frac{1}{1008}\circ\frac{2}{1008}\circ\ldots\circ\frac{335}{1008}\right)\circ\frac{1}{3}\circ\left(\frac{337}{1008}\circ\frac{338}{1008}\circ\ldots\circ\frac{2016}{1008}\right)=\frac{1}{3}$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^4+3\right)-x\cdot 4x^3}{\left(x^4+3\right)^2}=\frac{3\left(1-x^4\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=$	3p
	$=-\frac{3\left(x^4-1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}=-\frac{3(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)}{\left(x^4+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\frac{1}{3}$	2p
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\frac{1}{3}x$	3p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	1p
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f crescătoare pe $[-1,1]$ și $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f descrescătoare pe $[1,+\infty)$	1p
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\frac{1}{4}$, $f(1)=\frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	3p
2.a)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-1)e^x-2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	3p
	$F(1)=0\Rightarrow c=2$, deci $F(x)=(x-1)e^x-2x+2$	2p
b)	$\int_0^1\left(x^2e^x-2x\right)dx=x^2e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx-x^2\Big\vert_0^1=$	3p
	$=e-3$	2p
c)	$\int_1^x f(t)dt=F(x)-F(1)=(x-1)\left(e^x-2\right)$	3p
	$(x-1)\left(e^x-2\right)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=\ln 2$	2p

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(a+ib)+(a-ib)=6+i \Leftrightarrow 3a+ib=6+i$, unde $z=a+ib$ și $a,b\in\mathbb{R}$	**2p**
	$a=2$, $b=1$, deci $z=2+i$	**3p**
2.	$f(1)+f(2)+\ldots+f(10)=(4\cdot1-5)+(4\cdot2-5)+\ldots+(4\cdot10-5)=4(1+2+\ldots+10)-10\cdot5=$	**3p**
	$=220-50=170$	**2p**
3.	$\log_2(x+3)=\log_2 2+\log_2(x+1)\Rightarrow x+3=2(x+1)$	**3p**
	$x=1$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere cu cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1\Rightarrow m_d=-1$, unde d este dreapta care trece prin C și este perpendiculară pe AB	**2p**
	Ecuația dreptei d este $y=-x+4$	**3p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow BC=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=$	**2p**
	$=\dfrac{3\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{1}{2}}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\4&9&1\end{pmatrix}$, $A(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&0\\4&9&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$A(1)-A(0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&x\\4&9&x^2\end{vmatrix}=3x^2+18+4x-12-9x-2x^2=$	**3p**
	$=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\det(A(x))=x^2-5x+6=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$	**2p**
	Valoarea minimă se obține pentru $a=\dfrac{5}{2}$	**3p**

2.a)	$x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 4 + 1 =$	**2p**
	$= 4x(y-1) - 4(y-1) + 1 = 4(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$N = 4(2016-1)(2017-1) + 1 = 4 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1 =$	**2p**
	$= 4 \cdot 2015 \cdot (2015+1) + 1 = 4 \cdot 2015^2 + 4 \cdot 2015 + 1 = (2 \cdot 2015 + 1)^2 = 4031^2$	**3p**
c)	$a \circ b = 13 \Leftrightarrow 4(a-1)(b-1) + 1 = 13 \Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 3$	**2p**
	Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a = 2$, $b = 4$ sau $a = 4$, $b = 2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$	**3p**
	$= 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$f(1) = 0$, $f'(1) = 1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = x - 1$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$	**1p**
	$x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right] \Rightarrow f'(x) \le 0$, deci f descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$	**1p**
	$x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right) \Rightarrow f'(x) \ge 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$	**1p**
	Cum $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$, obținem $f(x) \ge -\frac{1}{2e} \Leftrightarrow 1 + 2ef(x) \ge 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x-1)e^x e^{-x}dx = \int_0^1 (x-1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big\|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$F'(x) = (x + a + 1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x) = f(x) \Rightarrow (x + a + 1)e^x = (x-1)e^x$ pentru orice număr real x, de unde obținem $a = -2$	**3p**
c)	$x^3 f(x) = (x^4 - x^3)e^x$ și, cum $x \in [0,1] \Rightarrow 1 \le e^x$ și $x^4 - x^3 \le 0$, obținem $x^3 f(x) \le x^4 - x^3$	**3p**
	$\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \le \int_0^1 (x^4 - x^3)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4}\right)\Big\|_0^1 = -\frac{1}{20}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=3+4i$	**3p**
	$\bar{z}=3-4i$	**2p**
2.	Cum n este număr natural, $(n+4)(n-3)<0 \Rightarrow n<3$	**2p**
	$n=0$, $n=1$ sau $n=2$	**3p**
3.	$\lg(x+1)=\lg(x-5)^2 \Rightarrow x+1=(x-5)^2$	**2p**
	$x^2-11x+24=0 \Rightarrow x=3$, care nu verifică ecuația și $x=8$, care verifică ecuația	**3p**
4.	O mulțime cu n elemente are C_n^2 submulțimi cu două elemente	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=45 \Rightarrow n=10$	**3p**
5.	$\vec{v}=2\overrightarrow{AC}$, deci $AC=10$	**3p**
	Cum $ABCD$ este dreptunghi, obținem $BD=10$	**2p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2=2 \Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1&0&4\\-4&1&-8\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$\det(A(a)+aA(0))=\begin{vmatrix}a+1&0&2a\\-2a&a+1&-2a^2\\0&0&a+1\end{vmatrix}=(a+1)^3$	**3p**
	$(a+1)^3=2^3 \Rightarrow a=1$	**2p**
c)	$(m+n)^3=m^3+n^3+18$	**2p**
	$mn(m+n)=6$ deci, cum m și n sunt numere naturale și $m<n$, obținem $m=1$ și $n=2$	**3p**
2.a)	$x*y=\left(xy+\hat{6}x\right)+\left(\hat{6}y+\hat{1}\right)+\hat{1}=$	**3p**
	$=x\left(y+\hat{6}\right)+\hat{6}\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}=\left(x+\hat{6}\right)\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_7$	**2p**
b)	$x*\hat{1}=\left(x+\hat{6}\right)\left(\hat{1}+\hat{6}\right)+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}$	**2p**
	$\hat{1}*x=\left(\hat{1}+\hat{6}\right)\left(x+\hat{6}\right)+\hat{1}=\hat{0}+\hat{1}=\hat{1}=x*\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$	**3p**

c)	$\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=\left(\hat{0}*\hat{1}\right)*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}=$	**3p**
	$=\hat{1}*\left(\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}\right)=\hat{1}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**2p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9+2x-6\right)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ și $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(1,3)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(3,+\infty)$, deci punctele de extrem ale funcției f sunt $x=1$ și $x=3$	**3p**
c)	f este crescătoare pe $x\in(-\infty,1]$ și descrescătoare pe $x\in[1,3]$, deci $f(x)\le f(1)$ pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**3p**
	$f(1)=4e$, deci $f(x)\le 4e \Leftrightarrow e^x(x-3)^2\le 4e \Leftrightarrow (x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(3x^2-4x+1\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ și, cum $f(1)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{e} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-4x+1\right)dx+\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx=$	**2p**
	$=\left(x^3-2x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}+\left(2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}\right)\Big\vert_{1}^{e}=4-2\sqrt{e}+4=2\left(4-\sqrt{e}\right)$	**3p**
c)	$\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln^2 x}{x}\,dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big\vert_{e^n}^{e^{n+1}}=\frac{3n^2+3n+1}{3}$	**3p**
	$\frac{3n^2+3n+1}{3}=\frac{7}{3}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(a+ib)+2(a-ib)=5+2i \Leftrightarrow 5a+ib=5+2i$, unde $z=a+ib$ cu a și b numere reale	**3p**
	$a=1$ și $b=2$, deci $z=1+2i$	**2p**
2.	$(f\circ f)(x)=f(x+a)=x+2a$, $(f\circ f\circ f)(x)=x+3a$	**3p**
	$x+3a=x+3$, pentru orice număr real x, deci $a=1$	**2p**
3.	$\log_3 \frac{2x+3}{x}=1 \Rightarrow \frac{2x+3}{x}=3$	**3p**
	$2x+3=3x \Rightarrow x=3$, care convine	**2p**
4.	Sunt 900 de numere naturale de trei cifre, deci sunt 900 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 90 de numere naturale de trei cifre care se divid cu 10, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$\frac{a+1}{1}=\frac{5a-1}{3} \Leftrightarrow 3a+3=5a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$\sin A=\frac{4}{5}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}=\frac{6\cdot 10\cdot \frac{4}{5}}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(-1)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(-1))=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-1&0\\4&0&5\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-(-4)-0-0=4$	**3p**
b)	$M(x)+M(y)=\begin{pmatrix}x+1&0&x+2\\0&x&0\\3-x&0&4-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y+1&0&y+2\\0&y&0\\3-y&0&4-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2&0&x+y+4\\0&x+y&0\\6-x-y&0&8-x-y\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&0\\3&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(x+y)+1&0&(x+y)+2\\0&x+y&0\\3-(x+y)&0&4-(x+y)\end{pmatrix}=M(0)+M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$M(m)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}4m+6 & 0 & 6m+9\\ 0 & m & 0\\ 14-4m & 0 & 21-6m\end{pmatrix}$, $M(1)\cdot M(n)=\begin{pmatrix}11-n & 0 & 16-n\\ 0 & n & 0\\ 11-n & 0 & 16-n\end{pmatrix}$, unde m și n sunt numere naturale $50+m=54-3n \Leftrightarrow m+3n=4$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=1$, $n=1$ sau $m=4$, $n=0$	2p 3p
2.a)	$x*y=1-4xy+4x+4y-4=$ $=1-4x(y-1)+4(y-1)=1-4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y	3p 2p
b)	$x*\frac{1}{x}=1-4(x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right)=1-4(x-1)\cdot\frac{1-x}{x}=$ $=1+\frac{4(x-1)^2}{x}\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	3p 2p
c)	$x*x=1-4(x-1)^2$, $x*x*x=1+4^2(x-1)^3$, $x*x*x*x=1-4^3(x-1)^4$, unde x este număr real $(x-1)\left(1+4^3(x-1)^3\right)=0$, deci $x=\frac{3}{4}$ sau $x=1$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5\cdot\frac{1}{x}-2x-3=$ $=\frac{-2x^2-3x+5}{x}=\frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	3p 2p
b)	$f''(x)=\frac{-2x^2-5}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$ $f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$	2p 3p
c)	f este crescătoare pe $(0,1]$ și descrescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\leq f(1)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ $f(1)=-4\Rightarrow 5\ln x-x^2-3x\leq -4$, deci $5\ln x\leq x^2+3x-4$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	3p 2p
2.a)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=\left(x^2+4x+5\right)e^x$, $x\in\mathbb{R}$ $f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	2p 3p
b)	$\int_0^1\left(\left(x^2+4x+5\right)e^x-x^2e^x-5e^x\right)dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\|_0^1=$ $=0-4\cdot(-1)=4$	3p 2p
c)	Pentru orice $x\in[-3,-1]$, obținem $1\leq x^2+4x+5\leq 2$, deci $e^x\leq f(x)\leq 2e^x$ $\int_{-3}^{-1}e^x\,dx\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq 2\int_{-3}^{-1}e^x\,dx$ și, cum $\int_{-3}^{-1}e^x dx=\frac{e^2-1}{e^3}\Rightarrow\frac{e^2-1}{e^3}\leq\int_{-3}^{-1}f(x)dx\leq\frac{2\left(e^2-1\right)}{e^3}$	2p 3p