

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul real care are partea întregă -2 și partea fracționară $0,75$.
- 5p 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$ cu axa Ox și, respectiv, cu axa Oy .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+10} = 81$.
- 5p 4. Determinați numărul natural n pentru care $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 64$.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ și $P(3,5)$. Arătați că triunghiul MNP este isoscel.
- 5p 6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 8$ și $BC = 10$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x, a) = \begin{pmatrix} x & a & a \\ -a & x & a \\ -a & -a & x \end{pmatrix}$, unde x și a sunt numere reale.
- 5p a) Calculați $\det(A(2,0))$.
- 5p b) Arătați că $A(x, a) + A(x, -a) = 2xA(1,0)$, pentru orice numere reale x și a .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x, -3)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Determinați numerele întregi a și b , știind că $a \circ b = 2$.
- 5p c) Calculați $(-1) \circ 0 \circ 1 \circ \dots \circ 2015$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x - e^x + 1$.
- 5p a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.
- 5p a) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.
- 5p b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1) = 1$.
- 5p c) Arătați că pentru orice număr real nenul a are loc relația $\int_0^a f(x) dx + \frac{1}{a} \int_a^0 f(x) dx = a^4 - 1$.

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $2a_{10} = a_5 + a_6 + 36$.
- 5p** 2. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$ cu dreapta de ecuație $y = x - 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_2 (x^2 - 1) = 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor divizibil cu 10.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ și $C(5,1)$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC .
- 5p** 6. Arătați că $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} = \operatorname{ctg}^2 x$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ x & 2x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(M(0))$.
- 5p** b) Demonstrați că $2M(x) - M(-x) = M(3x)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(n, 2n-1)$ și $B(n^2, 2n^2-1)$, unde n este număr natural, $n \geq 2$. Demonstrați că aria triunghiului OAB este număr natural.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.
- 5p** a) Calculați $1 \circ \frac{1}{3}$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p** c) Calculați $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \dots \circ \frac{2016}{1008}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = -\frac{3(x-1)(x+1)(x^2+1)}{(x^4+3)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x - 2$.

5p a) Determinați primitiva F a funcției f , pentru care $F(1) = 0$.

5p b) Calculați $\int_0^1 x f(x) dx$.

5p c) Determinați numerele reale x , știind că $\int_1^x f(t) dt = 0$.

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați numărul complex z , știind că $2z + \bar{z} = 6 + i$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 5$. Calculați $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(10)$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) = 1 + \log_2(x+1)$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(5,5)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-2,6)$ și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 3\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$ și $m(\sphericalangle BAC) = 45^\circ$. Determinați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Calculați $A(1) - A(0)$.
- 5p** b) Arătați că $\det(A(x)) = (x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)) \leq \det(A(x))$, pentru orice număr real x .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y = 4(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** b) Arătați că $N = 2016 \circ 2017$ este pătratul unui număr natural.
- 5p** c) Determinați numerele naturale a și b pentru care $a \circ b = 13$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $1 + 2e f(x) \geq 0$, pentru orice număr real x , $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x} dx = -\frac{1}{2}$.
- 5p** b) Determinați numărul real a , știind că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (x+a)e^x$ este o primitivă a funcției f .
- 5p** c) Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x) dx \leq -\frac{1}{20}$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Determinați conjugatul numărului complex $z = (1-i)(2+i) + 5i$.
- 5p** 2. Determinați numerele naturale n pentru care $n^2 + n - 12 < 0$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1) = 2\lg(x-5)$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v} = \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$. Știind că lungimea vectorului \vec{v} este egală cu 20, determinați lungimea vectorului \vec{BD} .
- 5p** 6. Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

- 5p** a) Calculați $\det(A(2))$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a) + aA(0)) = 8$.
- 5p** c) Știind că $\det((m+n)A(x)) = \det(mA(x)) + \det(nA(x)) + 18$, pentru orice număr real x , determinați numerele naturale m și n , $m < n$.
2. Pe mulțimea \mathbb{Z}_7 se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$.
- 5p** a) Demonstrați că $x * y = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_7$.
- 5p** b) Demonstrați că $x * \hat{1} = \hat{1} * x = \hat{1}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}_7$.
- 5p** c) Calculați $\hat{0} * \hat{1} * \hat{2} * \hat{3} * \hat{4} * \hat{5} * \hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$.

- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați punctele de extrem ale funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că $(x-3)^2 \leq 4e^{1-x}$, pentru orice $x \in (-\infty, 3]$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1, & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \in [1, +\infty) \end{cases}$.

- 5p** a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Arătați că $\int_{-1}^e f(x) dx = 2(4 - \sqrt{e})$.
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x) dx = \frac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Determinați numărul complex z , știind că $3z + 2\bar{z} = 5 + 2i$, unde \bar{z} este conjugatul lui z .
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ f \circ f)(x) = x + 3$, pentru orice număr real x .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x + 3) - \log_3 x = 1$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să se dividă cu 10.
- 5p 5. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + (5a-1)\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p 6. Calculați aria triunghiului ABC , știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și $\cos A = \frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Calculați $\det(M(-1))$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x) + M(y) = M(0) + M(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați perechile de numere naturale m și n , știind că suma elementelor matricei $M(m) \cdot M(1)$ este egală cu suma elementelor matricei $M(1) \cdot M(n)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$.
- 5p a) Demonstrați că $x * y = 1 - 4(x-1)(y-1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p b) Arătați că $x * \frac{1}{x} \geq 1$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x * x * x * x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \ln x - x^2 - 3x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0, +\infty)$.
- 5p c) Demonstrați că $5 \ln x \leq x^2 + 3x - 4$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$.
- 5p a) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p b) Calculați $\int_0^1 (f(x) - x^2 e^x - 5e^x) dx$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{e^2 - 1}{e^3} \leq \int_{-3}^{-1} f(x) dx \leq \frac{2(e^2 - 1)}{e^3}$.