Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul MateInfoUB 2021

Model subiect etapa 1

Timp de lucru 3 ore

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + ax + b$. Se ştie că valoarea minimă a funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(2x) - f(x)$ este -1. Atunci valoarea minimă a funcţiei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(3x) - f(x)$ este

A -2 B 3 C $-\frac{3}{2}$ D 0 E 1

2. Pe mulţimea $G = \{a, b, c, d\}$ definim legea de compoziţie internă $*$, descrisă prin diagrama următoare:

$*$	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	b	a	b	a
c	a	b	c	d
d	b	a	d	c

Câte dintre următoarele afirmaţii, referitoare la mulţimea G şi la legea de compoziţie $*$, sunt false?

- $*$ este comutativă
- $(G, \star)$ este grup
- $(\{a, b\}, *)$ este grup
- $(\{a, c\}, *)$ este grup
- c este elementul neutru al legii $*$.

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

3. Fie numărul $N = 451326$. Considerăm toate numerele care se pot forma prin permutarea cifrelor lui N şi le scriem ulterior în ordine crescătoare. Atunci, în acest şir, N se află pe poziţia:

A 432 B 433 C 434 D 435 E 720

4. Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ şi $g(x) = \cos x$. Aria mulţimii cuprinsă între graficele funcţiilor f şi g şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = 2\pi$ este:

A $4\sqrt{2}$ B 0 C $2\sqrt{2}$ D π E $2\sqrt{2} + 1$

5. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ şi F o primitivă a funcţiei f. Atunci valoarea limitei $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xF(x)}{f(x)}$ este :

A 0 B $+\infty$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{1}{3}$ E 2

6. În triunghiul echilateral ABC de latură 3, punctele P şi Q împart latura BC în trei părţi egale. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, lungimea vectorului $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}$ este

A $\sqrt{3}$ B $2\sqrt{3}$ C $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E $\frac{1}{3}$

7. Punctele $A(p,-6)$ şi $B(4,k)$ sunt diametral opuse situate pe un cerc cu centrul în originea sistemului de coordonate. Panta dreptei AB este

$\boxed{A}$ 1 $\boxed{B}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{C}$ $-\frac{2}{3}$ $\boxed{D}$ $\frac{2}{3}$ $\boxed{E}$ $-\frac{3}{2}$

8. Numărul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^4 - x^3 - x^2 - x = 0$ este:

$\boxed{A}$ 0 $\boxed{B}$ 1 $\boxed{C}$ 2 $\boxed{D}$ 3 $\boxed{E}$ 4

9. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 7$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g(2) = 2$ şi $f(g(x)) = g(f(x))$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci g are:

$\boxed{A}$ 1 punct fix $\boxed{B}$ 2 puncte fixe $\boxed{C}$ 3 puncte fixe $\boxed{D}$ 4 puncte fixe $\boxed{E}$ o infinitate de puncte fixe

10. Fie funcţia $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{3x^2 + mx + n\}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, iar $\{z\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului z. Funcţia f este injectivă dacă:

$\boxed{A}$ $m = -7$ $\boxed{B}$ $m = 0$ $\boxed{C}$ $m = 2$ $\boxed{D}$ $m = 2\sqrt{3}$ $\boxed{E}$ $m = 4,9$

11. Considerăm matricea

$$A = \begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix},$$

unde fiecare din elementele matricei, marcate cu $*$, poate fi 0 sau 1. Numărul de astfel de matrice inversabile este egal cu:

$\boxed{A}$ 4095 $\boxed{B}$ 64 $\boxed{C}$ 256 $\boxed{D}$ 512 $\boxed{E}$ 576

12. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n) = 2$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^3}$ este :

$\boxed{A}$ $\frac{1}{3}$ $\boxed{B}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{C}$ 1 $\boxed{D}$ 0 $\boxed{E}$ $\frac{1}{6}$

13. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)e^{(x-1)|(x-1)(x-2)(x-3)|}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Mulţimea punctelor în care funcţia f nu este derivabilă este:

$\boxed{A}$ $\{3\}$ $\boxed{B}$ $\{1,2,3\}$ $\boxed{C}$ $\{1,2\}$ $\boxed{D}$ $\{1,3\}$ $\boxed{E}$ $\{2,3\}$

14. Fie ΔABC un triunghi de arie S. Notăm cu a, b şi c lungimile laturilor BC, AC şi AB. Mediana dusă din A intersectează bisectoarea unghiului $\widehat{ABC}$ în punctul X. Notăm cu x lungimea perpendicularei dusă din X pe latura BC. Atunci x este:

$\boxed{A}$ $\frac{2S}{2c+a}$ $\boxed{B}$ $\frac{2S}{a+b+c}$ $\boxed{C}$ $\frac{c+a}{2}$ $\boxed{D}$ $\frac{2c+a}{3}$ $\boxed{E}$ $\frac{2S}{2b+a}$

15. Fie ΔABC un triunghi arbitrar înscris într-un cerc de centru O şi rază 1. Presupunem în plus că $\widehat{AOM} = 150^o$ unde M este mijlocul lui $[BC]$. Notăm cu H ortocentrul triunghiului. Dacă A, B, C sunt alese astfel încât segmentul $[OH]$ este de lungime minimă, atunci lungimea laturii $[BC]$ este egală cu:

$\boxed{A}$ $\sqrt{15}$ $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ $\boxed{C}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{D}$ $\frac{\sqrt{13}}{4}$ $\boxed{E}$ $\sqrt{3}$

16. Fie ΔABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc rază 1. Fie P un punct oarecare pe cercul circumscris trunghiului, diferit de vârfurile acestuia. Suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ este egală cu:

$\boxed{A}$ $3\sqrt{3}$ $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\boxed{C}$ 6 $\boxed{D}$ 3 $\boxed{E}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Se ştie că soluţiile ecuaţiei $9x^3 - 36x^2 + 45x - 17 = 0$ sunt trei numere reale pozitive care reprezintă laturile unui triunghi. Aria acestui triunghi este:

A 4 B $\sqrt{3}$ C $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E 6

18. Numerele reale a, b, c satisfac următorul sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} ab + a + b = c, \\ bc + b + c = a, \\ ca + c + a = b. \end{cases}$$

Numărul de valori distincte pe care le poate lua a este :

A 0 B 1 C 2 D 3 E 4

19. Considerăm mulţimea $A = \left\{ \int_0^1 |t^{2021} - x^{2021}| \, dt \quad | x \in [0,1] \right\}$. Atunci $\max(A) + \min(A)$ este:

A 2 B 1 C $1 - \frac{1}{2022 \cdot 2^{2021}}$ D $1 - \frac{1}{2^{2021}}$ E $\frac{2021}{2022}$

C

20. Pentru câte polinoame cu coeficienţi complecşi, de forma $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, mulţimea soluţiilor (complexe) ale ecuaţiei $P(x) = 0$ este grup faţă de înmulţire?

A 1 B 3 C 4 D 5 E o infinitate

21. În triunghiul ABC medianele corespunzătoare laturilor $[BC]$ şi $[AC]$ sunt perpendiculare. Fie $t := \frac{||BC||}{||AC||}$. Atunci

A $t \in (\frac{1}{2}, 2)$ B $t = \frac{1}{2}$ C $t = 2$ D $t > 2$ E $t \in (0, \frac{1}{2})$

22. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $M \in [AB], N \in [CD]$ puncte variabile astfel încât $\frac{||AM||}{||AB||} = \frac{||CN||}{||CD||}$. Fie $t := \frac{||AM||}{||AB||}$ şi notăm cu S funcţia definită prin $S(t) := S_{\Delta ANB} + S_{\Delta CMD}$. Atunci:

A funcţia S este constantă

B funcţia S este strict crescătoare

C funcţia S este strict descrescătoare

D funcţia S este neconstantă şi are un maxim pentru $t = \frac{1}{2}$

E funcţia S este neconstantă şi are un minim pentru $t = \frac{1}{2}$

23. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = \frac{1}{2}$ şi $x_{n+1} = \sin x_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci şirul $y_n = \sqrt{n} \cdot x_n$, $n \in \mathbb{N}^*$ are limita:

A 0 B 1 C $\sqrt{3}$ D $+\infty$ E $\sqrt{2}$

24. Alegem la întâmplare numerele distincte a şi b din mulţimea $\{1; 2; \ldots; 10\}$. Cu ajutorul lor, definim şirul $(x_n)_{n \geq 1}$, descris prin condiţiile: $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = ax_{n+1} - bx_n$, pentru orice $n \geq 1$. Probabilitatea ca, pentru alegerea făcută, şirul x_n să fie convergent, este:

A 0 B $0,1$ C $0,5$ D $0,09$ E 1