Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=3+(3+2)+(3+2\cdot 2)=$ $=15$	**3p** **2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=-1$ $-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{12}{4}=-3$	**2p** **3p**
3.	$x^2-4x+4=0$ $x=2$ care verifică ecuația	**3p** **2p**
4.	Numărul submulțimilor cu 3 elemente ale unei mulțimi cu 5 elemente este egal cu $C_5^3=$ $=10$	**3p** **2p**
5.	$M(-2,3)$ $AM=4$	**2p** **3p**
6.	$\cos a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ $\operatorname{ctg} a=2\sqrt{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(3))=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 3=$ $=3$	**3p** **2p**
b)	$A(-2015)=\begin{pmatrix}2 & -2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix}2 & 2015\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ $A(-2015)+A(2015)=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$	**2p** **3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}2 & x\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-x$ $x^2+x-6=0\Leftrightarrow x_1=-3$ și $x_2=2$	**2p** **3p**
2.a)	$f(\hat{0})=\hat{0}^3+a\cdot\hat{0}=$ $=\hat{0}$	**2p** **3p**
b)	$f(\hat{3})=\hat{2}+a\cdot\hat{3}$ $\hat{2}+a\cdot\hat{3}=\hat{3}\Rightarrow a=\hat{2}$	**2p** **3p**
c)	$\hat{1}+a=\hat{3}+a\cdot\hat{2}\Rightarrow a=\hat{3}$ $f(\hat{3})=\hat{1}$ și $f(\hat{4})=\hat{1}\Rightarrow f(\hat{3})=f(\hat{4})$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x-x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,e]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,e]$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[e,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[e,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+\dfrac{x}{x+1}\right)dx=\int_0^1\left(x^2+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^3}{3}+x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{4}{3}-\ln 2$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^1\left(x+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}+\ln 2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}+\ln 2=\dfrac{1}{2}+\ln\left(n^2+n\right)\Rightarrow n=-2$ nu este număr natural şi $n=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1 \cdot q^4 = 48$ și $b_1 \cdot q^7 = 384 \Rightarrow q = 2$	**3p**
	$b_1 = 3$	**2p**
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 6$, deci graficul funcției f intersectează axa Ox în punctele $(1,0)$ și $(6,0)$	**3p**
	Distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 5	**2p**
3.	$\left(2^5\right)^x = 2^4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 5x = 4 + x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sunt 2 numere care verifică egalitatea, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	$\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a-1}{2} \Leftrightarrow 2a + 2 = 6a - 6$	**3p**
	$a = 2$	**2p**
6.	$(2\sin x + \cos x)^2 = 4\sin^2 x + 4\sin x\cos x + \cos^2 x$	**2p**
	$(\sin x + 2\cos x)^2 = \sin^2 x + 4\sin x\cos x + 4\cos^2 x \Rightarrow (2\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + 2\cos x)^2 - $ $-4\sin 2x = 5\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 8\sin x\cos x - 4 \cdot 2\sin x\cos x = 5$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$, $\det(2A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} =$	**3p**
	$= 2 \cdot 2 - 4 \cdot 8 = 4 - 32 = -28$	**2p**
b)	$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2x \\ 2y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1 & 2+2x \\ 4+2y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1$ și $y = -2$	**3p**
c)	$AB = \begin{pmatrix} 2y & x \\ y & 4x \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 4x & x \\ y & 2y \end{pmatrix}$	**2p**
	$AB = BA \Leftrightarrow y = 2x$, deci $\det B = \begin{vmatrix} 0 & x \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -2x^2 \leq 0$, pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$(-1)\circ 1=3\cdot(-1)\cdot 1+3\cdot(-1)+3\cdot 1+2=$ $=-3-3+3+2=-1$	**3p** **2p**
b)	$3x^2+3x+3x+2=x \Leftrightarrow 3x^2+5x+2=0$ $x_1=-\frac{2}{3}$ şi $x_2=-1$	**3p** **2p**
c)	$3ab+3a+3b+3-1=8 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)=3$ Cum a şi b sunt numere întregi, obţinem $(-4,-2)$, $(-2,-4)$, $(0,2)$ şi $(2,0)$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=$ $=e^x+(x-2)e^x=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}}=0$ Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=xe^x$, $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ $f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f'$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ $f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f'$ este crescătoare pe $[0,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge f'(0)=-1$, pentru orice număr real x	**2p** **1p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 2x\,dx=x^2\Big\|_1^2=$ $=4-1=3$	**3p** **2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2016\right)'=2x+\frac{1}{x}=$ $=\frac{2x^2+1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p** **3p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(4x^2+4+\frac{1}{x^2}\right)dx=$ $=\pi\left(\frac{4x^3}{3}+4x-\frac{1}{x}\right)\Big\|_1^2=\frac{83\pi}{6}<14\pi$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+2i=(1-i)^2+2i=1-2i+i^2+2i=$	**2p**
	$=1-1=0$	**3p**
2.	$f(0)=2017$	**2p**
	$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(2017)=0$	**3p**
3.	$x^2-3x=x-4 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulţimea M are 100 de elemente, deci sunt 100 de cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea M sunt 10 pătrate perfecte, deci sunt 10 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	Panta unei perpendiculare pe dreapta d este egală cu -1	**2p**
	Ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta d este $y=-x+1$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\sin\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{6\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2-(-2)=4$	**3p**
b)	$A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix}1+m-1 & -1\\ 2 & 1+m-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1-m-1 & -1\\ 2 & 1-m-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=2A(1)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}m-1 & -1\\ 2 & m-2\end{vmatrix}=m^2-3m+4$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $m^2-3m+4\neq 0$, deci matricea $A(m)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=-3xy+9x+9y-27+3=$	**2p**
	$=-3x(y-3)+9(y-3)+3=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
b)	$(x*y)*z=(-3(x-3)(y-3)+3)*z=9(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(-3(y-3)(z-3)+3)=9(x-3)(y-3)(z-3)+3=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y şi z, deci legea de compoziţie „$*$” este asociativă	**3p**

c)	$(x*x)*x=9(x-3)^3+3$	**2p**
	$9(x-3)^3+3=12 \Leftrightarrow (x-3)^3=1 \Leftrightarrow x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x}=\frac{3x^3-3}{x}=$	**3p**
	$=\frac{3(x^3-1)}{x}=\frac{3(x-1)(x^2+x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^3-3\ln x)=+\infty$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x=0$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$x\in(0,1] \Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty) \Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 (x^2+3x+3)f(x)\,dx=\int_1^2(2x+3)\,dx=(x^2+3x)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=10-4=6$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^3 \lvert f(x)\rvert\,dx=\int_0^3\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\ln(x^2+3x+3)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\ln 21-\ln 3=\ln 7$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 f'(x)f(x)\,dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\frac{1}{2}(1-1)=0$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n(n+2)<14$ și $n\in\mathbb{N}\Rightarrow n=0$ sau $n=1$ sau $n=2$	**3p**
	Suma elementelor mulțimii este egală cu $0+1+2=3$	**2p**
2.	$b=1$	**2p**
	$a(x+1)+1=ax+1+2$, pentru orice număr real $x\Rightarrow a=2$	**3p**
3.	$(x+2)(x+8)>0$	**2p**
	Mulțimea soluțiilor inecuației este $(-\infty,-8)\cup(-2,+\infty)$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor ordonate cu două elemente din $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ este egal cu $A_5^2=$	**3p**
	$=20$	**2p**
5.	$M(1,4)$ este mijlocul segmentului BC	**2p**
	Coordonatele simetricului punctului A față de punctul M sunt $x=2$ și $y=6$	**3p**
6.	$EF=3$	**2p**
	ΔDEF este dreptunghic în E, deci $\sin D=\frac{3}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{vmatrix}=0+0+0-(-1)-(-1)-0=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}3&0&1\\0&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=1$, $y=2$	**3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=2$	**2p**
	$B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$2\circ 9=2^{2\log_3 9}=2^{2\cdot 2}=$	**3p**
	$=2^4=16$	**2p**
b)	$x^{2\log_3 3}=25\Leftrightarrow x^2=25$	**2p**
	$x=-5$ care nu convine, $x=5$ care convine	**3p**
c)	$x\circ y=x^{2\log_3 y}=x^{\log_3 y^2}=\left(y^2\right)^{\log_3 x}=$	**3p**
	$=y^{2\log_3 x}=y\circ x$, pentru orice $x,y\in M$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{\left(e^x\right)'\cdot(x-1)-e^x\cdot(x-1)'}{(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$	**2p**
	$x\in(1,2]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(1,2]$ şi $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
c)	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f(2)=e^2$, deci $\dfrac{e^x}{x-1}\ge e^2\Leftrightarrow\dfrac{e^{x-2}}{x-1}\ge 1\Leftrightarrow e^{x-2}-x+1\ge 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x f(x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}x(-\cos x)'dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}+0\cdot\cos 0+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**2p**
c)	$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}g^2(x)dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=$	**2p**
	$=\dfrac{\pi}{2}x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}-\dfrac{\pi}{4}\sin 2x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi(\pi-2)}{8}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{(1+i)-(1-i)}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$	**3p**
	$a=i^2=-1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$\Delta=49-4m$	**2p**
	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{49}{4}\right]$, deci cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	**3p**
3.	$3^x\left(1+3+3^2\right)=117\Leftrightarrow 3^x=9$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$C_n^2=36$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=36$, deci $n=9$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(1,-1)$	**2p**
	Ecuația medianei din C este $y+1=\frac{1}{2}(x-1)$, deci $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$\cos x\sin x+\sin x\cos x=1\Leftrightarrow\sin 2x=1$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-3-0-0=-5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&1\\3&2a-1&1\\a-3&a&1\end{vmatrix}=-a^2+6a-5$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=1$ sau $a=5$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=1\\3x+y+z=1\\-2x+y+z=1\end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem $x_0=0$, deci $y_0+z_0=1$	**3p**
	$x_0^2=y_0z_0\Rightarrow y_0z_0=0$, deci soluțiile sunt $(0,1,0)$ sau $(0,0,1)$, care convin	**2p**

2.a)	$x*y=5xy-5x-5y+5+1=$ $=5x(y-1)-5(y-1)+1=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x*x=5(x-1)^2+1$, $x*x*x=25(x-1)^3+1$ $(x-1)^3<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)$	**2p** **3p**
c)	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19 \Leftrightarrow \frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$ $=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x \Leftrightarrow f'(a)=-1$ $\frac{a-2}{a^2}=-1 \Leftrightarrow a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$ $0<1<\frac{\pi}{2}<2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^3=$ $=\frac{27}{3}+3-0=12$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^1\|g(x)\|dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{2}\ln 2$	**3p** **2p**
c)	Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt-x$ este derivabilă și $h'(x)=e^{x^2+1}-1$ $h'(x)>0$ pentru orice număr real x, deci h este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=(3-1)(3+1)=$	**3p**
	$=2\cdot 4=8$	**2p**
2.	$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=m$	**2p**
	$6m=12$, deci $m=2$	**3p**
3.	$4(5-x)=x+10\Rightarrow 20-4x=x+10\Rightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{4}\Leftrightarrow 4a=3a-3$	**3p**
	$a=-3$	**2p**
6.	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$	**2p**
	$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\cdot(\cos x+\sin x)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$A(a,b)\cdot A(b,a)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-2ab & 2a^2+2b^2\\ -b^2-a^2 & -2ab+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-ab & 2(a^2+b^2)\\ -(a^2+b^2) & -ab\end{pmatrix}=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(A(m,n))=\begin{vmatrix}m & 2n\\ -n & m\end{vmatrix}=m^2+2n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2+2n^2=1$ obținem $m=-1$, $n=0$ sau $m=1$, $n=0$	**3p**
2.a)	$f=X^3-15X^2+95X-80\Rightarrow f(1)=1^3-15\cdot 1^2+95\cdot 1-80=$	**2p**
	$=1-15+95-80=1$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=15$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m$	**2p**
	$(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0\Leftrightarrow 225-3m=0$, deci $m=75$	**3p**

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	**2p**
	$x_1x_2x_3 = 80 \Rightarrow x_1x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă	**2p**
	Pentru orice numere reale x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 \|g(x)\|\,dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = \ln(x^2 + 9) \Big\|_1^9 =$	**3p**
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+1}{2} \right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x \Big\|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}\,dx = \left(\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \Big\|_1^{\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	**2p**