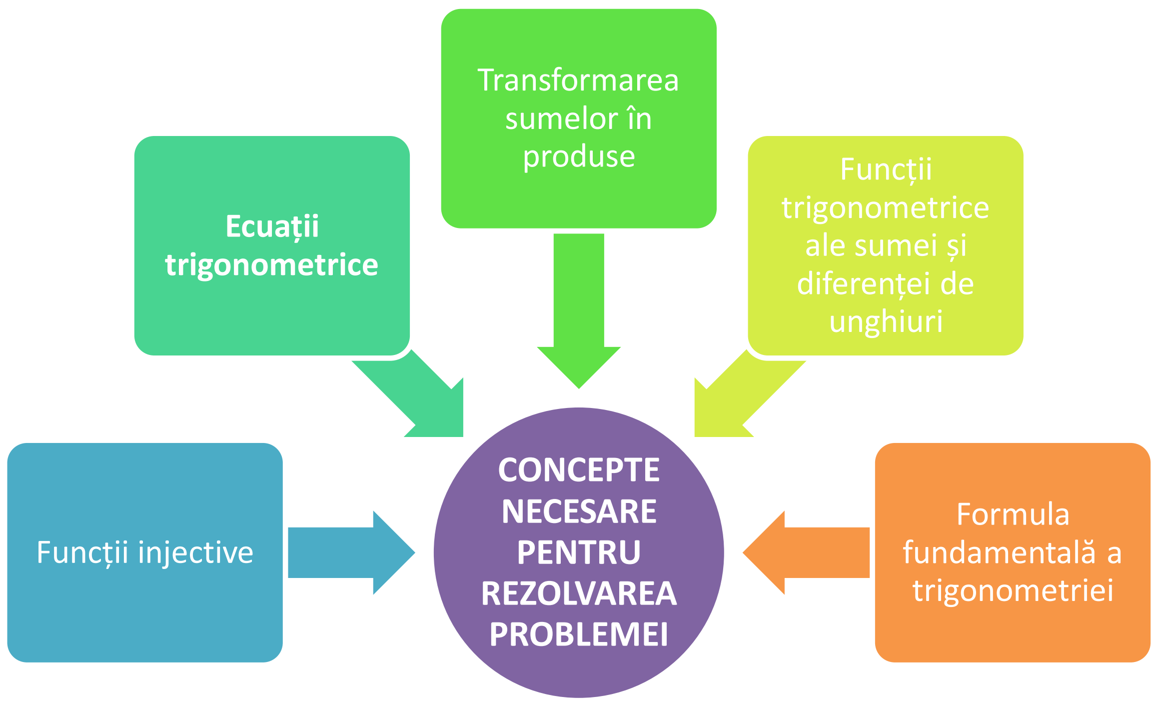
SUBIECTUL I6 – TEST19 - MATE-INFO- 2020

Să se arate că dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x$, atunci $x = \frac{\pi}{8}$.

Rezolvare:



1° **Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri. Transformarea sumelor în produse .Ecuații trigonometrice.**

a) $\begin{cases} \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x \\ \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \end{cases}, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b)

$$\cos a-\cos b \overset{\begin{cases}x+y=a\\x-y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{a+b}{2}\\y=\frac{a-b}{2}\end{cases}}{=} \cos(x+y)-\cos(x-y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y-\cos x\cos y-\sin x\sin y=$$

$$=-2\sin x\sin y=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

Prin urmare $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}, \forall a,b\in\mathbb{R}$

c) $\sin x=a \overset{a\in[-1,1]}{\Leftrightarrow} x=(-1)^k \arcsin a+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$; $\operatorname{tg}x=c \overset{c\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} x=\operatorname{arc\,tg}c+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$

Consecințe: $\sin x=0 \Leftrightarrow x=(-1)^k \arcsin 0+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}x=1 \Leftrightarrow x=\operatorname{arc\,tg}1+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$

d) $\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow \cos f(x)-\cos g(x)=0 \overset{b)}{\Leftrightarrow} -2\sin\frac{f(x)+g(x)}{2}\sin\frac{f(x)-g(x)}{2}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{f(x)+g(x)}{2}=0 \vee \sin\frac{f(x)-g(x)}{2}=0 \overset{c)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)+g(x)}{2}=k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \vee \frac{f(x)-g(x)}{2}=k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)+g(x)=2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \vee f(x)-g(x)=2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$$

Prin urmare, $\cos f(x)=\cos g(x) \Leftrightarrow f(x)+g(x)=2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z} \vee f(x)-g(x)=2k\pi, \forall k\in\mathbb{Z}$

2° Teorema fundamentală a trigonometriei

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \forall x\in\mathbb{R}$

3° Cosinusul și sinusul unui unghi în funcție de cosinusul arcului dublu

Conform a) rezultă $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \forall x,y\in\mathbb{R}$. Dacă în această relație înlocuim pe y cu x vom obține $\cos 2x=\cos x\cos x-\sin x\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$ sau $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Din $2^\circ \Rightarrow \cos^2 x=1-\sin^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$, respectiv $\sin^2 x=1-\cos^2 x, \forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x \overset{\cos^2 x=1-\sin^2 x}{\Rightarrow} \cos 2x=1-\sin^2 x-\sin^2 x \Rightarrow \cos 2x=1-2\sin^2 x$ și de aici obținem $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$. Prin urmare, $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \overset{\sin^2 x = 1 - \cos^2 x}{\Rightarrow} \cos 2x = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ și de aici obținem $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$. Prin urmare, $\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{2}}, \forall x \in \mathbb{R}$.

4° Funcții injective

Fie $f : A \to B$. Spunem că funcția f este injectivă $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Propoziție 1 Fie $f : A \to B$. Sunt echivalente afirmațiile:

i) f este injectivă

ii) $\forall x, y \in A$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Consecință Fie $f : A \to B$ o funcție injectivă și $x, y \in A$. Sunt echivalente afirmațiile:

i) $x = y$

ii) $f(x) = f(y)$

Propoziție 2 Fie $f : A \to B$. Dacă f este strict monotonă, atunci f este injectivă.

METODA 1

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2}} = \cos x \Leftrightarrow \cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos x \Leftrightarrow \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \cos x \overset{a)}{\Leftrightarrow} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \Leftrightarrow$$

$$\overset{d)}{\Leftrightarrow} x - \frac{\pi}{4} - x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x - \frac{\pi}{4} + x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing \vee x = k\pi + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z} \overset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} x = \frac{\pi}{8}$$

METODA 2

Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x$. Din T.F.T. știm că $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Notăm $\sin x = a$ și $\cos x = b$ și vom avea :

$$\begin{cases} a + b = \sqrt{2}b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \left(\sqrt{2} - 1\right)b \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\sqrt{2} - 1\right)^2 b^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \left[\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 + 1\right]b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(2 - 2\sqrt{2} + 1 + 1\right)b^2 = 1 \Rightarrow \left(4 - 2\sqrt{2}\right)b^2 = 1 \Rightarrow 2\left(2 - \sqrt{2}\right)b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2\left(2 - \sqrt{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2\left(4 - 2\right)} \Rightarrow b^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow b = \pm\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \Rightarrow$$

$$\overset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \cos x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ (1)}$$

Din $3^\circ \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}, \forall x \in \mathbb{R} \overset{\frac{\pi}{8} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ (2)}$$

Din (1) și (2) rezultă $\cos x = \cos\frac{\pi}{8} \underset{\cos_{\left|\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right.} \text{ injectivă}}{\overset{x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow}} x = \frac{\pi}{8}$. Verificarea finală ne conduce la concluzia că $\frac{\pi}{8}$ este valoarea căutată.

METODA 3

Fie $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x$. Avem că

$$\sin x = \left(\sqrt{2} - 1\right)\cos x \overset{\cos x \neq 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1 \text{ (3)}$$

Din $3^{\circ} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}, \forall x \in \mathbb{R} \overset{\frac{\pi}{8}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (4)

Din $3^{\circ} \Rightarrow \sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}, \forall x \in \mathbb{R} \overset{\frac{\pi}{8}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (5)

Din (4),(5) rezultă că

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = \frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{4-2}} = \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}} = \sqrt{\frac{6-4\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} =$$

$= \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \sqrt{2}-1$(6)

Din (3) și (6) vom avea $\sin x = \left(\sqrt{2}-1\right)\cos x \overset{\cos x\neq 0, \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} \underset{\operatorname{tg}\big|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)} \text{ injectivă}}{\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow}} x = \frac{\pi}{8}$.

METODA 4

Fie $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x$. Deoarece $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x > 0$ și $\sin x > 0$ iar de aici obținem imediat că $\sin x + \cos x > 0$ și $\sqrt{2}\cos x > 0$.

Prin urmare, $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos x \overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)}{\Leftrightarrow} \left(\sin x + \cos x\right)^2 = \left(\sqrt{2}\cos x\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=2\cos^2 x-1 \Leftrightarrow \sin 2x=\cos 2x \Leftrightarrow$$

$$\overset{x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\Rightarrow \cos 2x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}2x=1 \Leftrightarrow 2x=\operatorname{arctg}1+k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\wedge x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\setminus\left\{\frac{\pi}{4}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\overset{obs}{\Leftrightarrow} x=\frac{\pi}{8}.$$

Se **observă** că dacă $k\in\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ atunci $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\notin\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Singura situație convenabilă este atunci când $k=0$ iar atunci $x=\frac{\pi}{8}$.

Rămâne de discutat situația în care $x=\frac{\pi}{4}$. Dar atunci $\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ iar $\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$. Prin urmare, $x=\frac{\pi}{4}$ nu convine. Rămâne că $x=\frac{\pi}{8}$ este valoarea căutată.