Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-2} = 3^{2-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB = 10$, $AC = 10$ și $BC = 12$. Arătați că $\sin B = \frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} -mx + y + z = -1 \\ x - my + z = -1 \\ x + y - mz = m \end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m \neq -1$ și $m \neq 2$.

5p **c)** Pentru $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

5p **a)** Arătați că $x * y = -2(x-5)(y-5) + 5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10 = 5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m * n = 27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x) = 0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10} (x-4) f(x)\,dx = \ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x) = x f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2 \int_n^{n+1} f(x)\,dx\right) = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 2016$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{4x-6} = 4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A = \{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conţină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y - z = -1 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0, y_0, z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$. Demonstrați că $f(x \circ y) = f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori } a} = 3^{2015} - 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$, $x \in (1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2) + f'(3) + f'(4) + \ldots + f'(n)\right) = -\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x}\, f(x)\, dx = \frac{5}{2}$.

5p	**b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul real a, știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta BC.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ şi $BC=2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătaţi că $\det\left(A(0)\right)=-1$.
5p	**b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.
5p	**a)** Arătaţi că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.
5p	**c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

5p **b)** Demonstraţi că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Arătaţi că $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.
5p	**2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6**. Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați numărul real a, $a\neq-1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4\right)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Pentru $m=3$, descompuneţi polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_{-n}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z = 2 + i$. Arătați că $z + \overline{z} + z\overline{z} = 9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1, m)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1 - \log_2 x)(2 - \log_2 x) = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1 + \mathrm{tg}^2 x\right)\cos^2 x - \left(1 + \mathrm{ctg}^2 x\right)\sin^2 x = 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \\ -2x - y + 3z = 0 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9)) = 0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$.

5p **a)** Arătați că $x \circ y = (x + 7)(y + 7) - 7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x \circ x = x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a \circ (-6) = 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{1 - x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - x + x\ln x}{x(1 - x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = e - 1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3,\ldots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p **a)** Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinaţi coordonatele punctului M, știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.
5p	**6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $BC=3$ și $m(\sphericalangle ABC)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyz\,I_3$, pentru orice numere reale x, y și z.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det\left(A(n)A(n)+A(n)+I_3\right)$ este pătratul unui număr natural.
	2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.
5p	**b)** Pentru $a=-5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.
5p	**c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 \left(e^x+1\right)f(x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 5 + 2i$ și $z_2 = 3 - 3i$. Arătați că $3z_1 + 2z_2 = 21$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x + 2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3} = 3 \cdot 3^{3x}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB = 4$, $AC = 8$ și $A = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2)) = 2$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(-x)) \le 0$, pentru orice număr real x.
5p	**c)** Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n) = A(2)$, atunci $m + n = 3$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$, unde a este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1) = 0$.
5p	**b)** Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + X + 1$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2, +\infty)$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_1^e x \ln^n x \, dx$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^e x \, dx = \frac{e^2 - 1}{2}$.
5p	**b)** Demonstrați că $I_{n+1} \le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstrați că $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 1+2i$. Arătați că $2z_1 - 3z_2 = 1$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - 3mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1 + x_2 + x_1x_2 + 1 = 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4(x+3) + \log_4(x-3) = 2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.
5p	**5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Arătați că $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = -1$.
5p	**b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$.
5p	**c)** Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(0)$.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $f(0) = -1$, pentru orice număr real m.
5p	**b)** Demonstrați că $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 = -4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.
5p	**a)** Arătați că $\int_{-2}^{1} (x+2)^2 dx = 9$.
5p	**b)** Pentru $n = 1$, arătați că $\int_0^1 f(x) e^x dx = 2e - 1$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = -1$ și $x = 1$ are aria egală cu $\dfrac{242}{n+1}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.

5p **c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluţie a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\dfrac{4}{3}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n\,dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătați că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ și $C(0,8)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1&1&1\\a+1&-1&1\\1&1&-a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\(a+1)x-y+z=0\\x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.
5p	**c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(x)\,dx = 1$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $n=\left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{2}\right|$ este natural.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=11-x$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-11x$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x)\geq g(x)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x\cdot 2^{x+1}=72$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma folosind doar cifre impare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,3)$, $B(1,3)$ și $C(1,5)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris ΔABC, știind că $BC=4$, $B=\frac{\pi}{3}$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x-2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{x-2}\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $A(1)A(2)A(3)\cdot\ldots\cdot A(10)=A\left(m^2+m+17\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=12$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că toate rădăcinile polinomului f sunt numere întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy.

5p **c)** Demonstrați că $2^{\sqrt{3}}<3^{\sqrt{2}}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=9$.

5p	**b)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^4 f^n(x)dx$. Demonstraţi că $I_{n+1}\le 4I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\ge1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=3$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+7=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $2x_1+2x_2+3x_1x_2=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-2)+\log_2(x+2)=5$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,6)$ și $B(6,2)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{3}$, $AC=4$ și $A=\frac{2\pi}{3}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 9.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x-ay-z=1 \\ x+y+az=2 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(a))=a(1-a)(1+a)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Pentru $a=0$, demonstrați că sistemul de ecuații are o infinitate de soluții de forma (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0 și z_0 numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-2019)(y-2019)+2019$.

5p **a)** Arătați că $x*2019=2019$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $(x*x)*x=x$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $m*n=2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{x}-\ln\frac{x}{4}\ge 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \left(x^2+9\right) f(x)\,dx=\dfrac{1}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx$. Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\left(3-i\sqrt{2}\right)\left(3+i\sqrt{2}\right)$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2019^x+2019^{-x}=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților impară.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,-3)$ și $B(2,-2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe AB.
5p	**6.** Arătați că $\sin(a-b)\sin(a+b)=(\sin a-\sin b)(\sin a+\sin b)$, pentru orice numere reale a și b.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=2A(ab)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Demonstrați că matricea $B=A(\log_2 3)\cdot A(\log_3 4)\cdot A(\log_4 5)\cdot\ldots\cdot A(\log_{15}16)$ are toate elementele numere întregi.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $f(-1)-2f(0)+f(1)=2$, pentru orice numere reale m și n.
5p	**b)** Determinați numerele reale m și n, știind că polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-1.
5p	**c)** Demonstrați că $3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_1x_2x_3)-\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)=1$, pentru orice numere reale m și n, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^{-x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=x(2-x)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in\left(0,4e^{-2}\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact trei soluții reale.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x)-\ln x)\,dx=\frac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-x^2+f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria egală cu e^2.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{e^{-1}}^{1} x^n\left(f(x)-x^2\right)dx=0$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ este egală cu 15.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că vârful parabolei asociate funcției f are ordonata egală cu 2.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor cu cel puțin 8 elemente ale unei mulțimi cu exact 10 elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$, $B(-1,3)$ și $C(8,10)$. Determinați lungimea segmentului CD, unde punctul D este mijlocul segmentului AB.
5p	**6.** Arătați că $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.
5p	**b)** Demonstrați că $A(a)A(b)=ab\,I_3+(a+b+1)A(0)$, pentru orice numere reale a și b.
5p	**c)** Determinați numărul natural n pentru care $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.
5p	**b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2}{x+1}-\ln\frac{x}{x+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Se consideră funcțiile $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ și $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\frac{x}{x+1}$. Demonstrați că graficele funcțiilor g și h **nu** au niciun punct comun.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.
5p	**b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$, are aria egală cu $\frac{10\sqrt{5}-16}{3}$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 3 - i$ și $z_2 = 8 - 3i$. Arătați că $3z_1 - z_2 = 1$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 35$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\cdot 4^x - 4^{x+1} + 32 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice relația $n(n+1) \geq 42$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(8,4)$, $B(0,6)$ și $C(m,5)$. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Calculați lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, știind că $AB = 6$ și aria triunghiului ABC este egală cu 24.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln(a+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real, $a > 0$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)A(b) = A(ab + a + b)$, pentru orice numere reale a și b, $a > 0$, $b > 0$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > 0$, știind că $A(a)A(a)A(a) = A(7)$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 + mX^2 - mX + 2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(-2) = 0$.

5p **b)** Pentru $m = 1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Se consideră $a = \dfrac{x_1^2 + mx_1}{x_2x_3} + \dfrac{x_2^2 + mx_2}{x_1x_3} + \dfrac{x_3^2 + mx_3}{x_1x_2}$. Demonstrați că $a \in [3, +\infty)$, pentru orice număr real m.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\left(x^2 + 4x + 1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = e^x(x+5)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care ecuația $f(x) = a$ are exact trei soluții reale.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, +\infty)$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x} f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > e$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = e$ și $x = a$ are aria egală cu $2a$.